

Option Générale ECM 2A Analyse Numérique Avancée

G. Chiavassa

guillaume.chiavassa@ec-marseille.fr

Quelques références bibliographiques:

Sur les équations différentielles:

- Analyse numérique des équations différentielles, *M. Crouzeix, A.L. Mignot*, Masson
- Analyse numérique et équations différentielles, *J-P. Demailly*, Presses Universitaires de Grenoble.

Sur l'analyse fonctionnelle:

- Analyse de Fourier et Applications, *C. Gasquet, P. Witomski*, Masson.
- Analyse Fonctionnelle, *H. Brezis*, Masson.

Sur les EDP:

- Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, *P-A. Raviart, J-M. Thomas*, Masson.
- Introduction au calcul scientifique, *B. Lucquin, O. Pironneau*, Masson
- Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques, *C. Bernardi, Y. Maday*, Springer-Verlag
- Spectral Methods in Fluid Dynamics, *C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang*, Springer-Verlag
- Numerical Methods for Conservation Laws, *R.J. LeVeque*, Birkhauser.
- Riemann Solvers and numerical methods for fluid dynamics, *E.F. Toro*, Springer-Verlag

Logiciel Eléments Finis: **FreeFem++**, <http://www.freefem.org>

1 Rappels

Dans cette partie, nous rappelons les principaux résultats mathématiques que nous utiliserons dans ce cours. Il s'agit essentiellement de rappels d'analyse fonctionnelle.

1.1 Espaces de Hilbert

Ces espaces interviennent dans de nombreux domaines mathématiques et physiques, leur représentant le plus célèbre étant l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 1.1

Un espace *préhilbertien* est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle f, g \rangle$. C'est un espace vectoriel normé avec la norme associée au produit scalaire : $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Exemples: $\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^n, C^0([0, 1])$ l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathcal{C}$ continues sur $[0, 1]$ muni du produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Définition 1.2

H est un espace *Hilbertien* si c'est un espace préhilbertien *complet*¹ pour la norme associée.

On s'intéressera pour notre part aux espaces hilbertiens séparables, dont une propriété fondamentale est qu'ils admettent des bases orthonormales.

Définition 1.3

On appelle base hilbertienne de H , la famille $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H tels que:

- a) $\text{vect}\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans H .
- b) $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$.

Nous utiliserons très souvent les espaces de Hilbert séparables suivant:
Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$:

- $L^2(\Omega) = \{f \text{ telles que } \int_{\Omega} |f|^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

- $H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) / \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ } i = 1, \dots, n\}$ muni du produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \overline{g} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial g}{\partial x_i}}$$

est appelé espace de Sobolev d'ordre 1.

- $H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) / f|_{\Gamma} = 0\}$ où Γ représente le bord de Ω .

¹ H complet ssi toute suite de Cauchy de H converge dans H

$$- H_{per}^1([0, 2\pi]) = \{f \in H^1([0, 2\pi]) / \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)\}$$

Par exemple, les fonctions $\{\phi_k(x) = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base hilbertienne de $L_{per}^2([0, 2\pi])$ pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Les résultats suivant seront utilisés dans la suite du cours.

Inégalités

Soit H un espace de Hilbert, alors:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_H \|g\|_H \quad (Cauchy - Schwarz).$$

$$\|f + g\|_H \leq \|f\|_H + \|g\|_H \quad (Minkowski).$$

Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ C^1 par morceaux.

Soit $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, alors :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \, v = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} v \, d\sigma$$

où $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}$ avec $\vec{\nu}$ le vecteur normal à la frontière Γ .

Semi-norme

Pour une fonction de $H^m(\Omega)$ on définit la semi-norme $|v|_{m,\Omega}$ par:

$$|v|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}(v)|^2$$

Par exemple:

$$|v|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 dx dy.$$

2 Méthode variationnelle

Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert, u et v deux éléments de H .

Soit $a(u, v)$ une forme bi-linéaire :

a) *continue* : il existe une constante c telle que

$$\forall (u, v) \in H, |a(u, v)| \leq c \|u\|_H \|v\|_H$$

b) *coercive* : il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall v \in H, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2$$

Soit $L(\cdot)$ une forme linéaire *continue* : il existe une constante c telle que
 $\forall v \in H, |L(v)| \leq c \|v\|_H$,

alors

le problème variationnel : *trouver* $u \in H$ *tel que*

$$\forall v \in H, a(u, v) = L(v)$$

admet une solution *unique* $u^* \in H$.

De plus l'application de u à L fait correspondre u^* est continue de H' dans H .

Méthode de Galerkin

Soit H un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur H et $L(\cdot)$ une forme linéaire. On suppose que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites. La méthode de Galerkin consiste à chercher une solution approchée $u_h \in V_h$ du problème

$$\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = L(v_h),$$

où V_h est un sous-espace de H de dimension finie.

u_h existe et est unique et est appelée l'approximation de Galerkin de u .

Lemme de Céa

Ce résultat permet de contrôler l'erreur entre la solution du problème variationnel u et son approximation de Galerkin u_h :

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{c}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_H,$$

où c et α sont les constantes de continuité et de coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$.

Convergence et ordre de la méthode de Galerkin

On dira que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_H = 0$$

et d'ordre s si

$$\exists C \text{ indépendante de } h \text{ telle que } \|u - u_h\|_H \leq C h^s.$$

(C peut dépendre de u .)

Théorème de convergence de l'approximation interne

Si il existe un sous-espace W dense dans H et une application $r_h : W \rightarrow V_h$ telle que

$$\forall v \in W \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_H = 0$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_H = 0.$$

3 Méthode des éléments finis

Cette méthode consiste en la construction d'un espace d'approximation V_h particulier, puis au calcul de l'approximation u_h de u dans cet espace.

Triangulation d'un ouvert à bord polygonal

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à bord polygonal. On dira que τ_h est une triangulation admissible de Ω formée de triangles K si:

- 1) $\cup_{K \in \tau_h} K = \overline{\Omega}$
- 2) si K_1 et K_2 sont distincts:
 - soit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$
 - soit $K_1 \cap K_2$ est un sommet
 - soit $K_1 \cap K_2$ est un coté

Définition d'un élément fini

Le triplet (K, P, Σ) où

- K est un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^2$, d'intérieur non-vide.

- P est un *espace vectoriel de dimension finie* de fonctions définies sur K ,
- Σ est un ensemble de *formes linéaires*, $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ définies sur P et appelées degrés de liberté

est un *élément fini* si il vérifie la propriété d'*unisolvance*, c'est-à-dire:

$$1) \dim P = \text{card} \Sigma$$

$$2) \text{ si } p \in P, \text{ alors } \forall i = 1, \dots, r \quad \sigma_i(p) = 0 \iff p = 0$$

De 1) et 2), on montre qu'il existe r fonctions $\{p_i, i = 1, \dots, r\} \in P$, linéairement indépendantes, telles que

$$\sigma_j(p_i) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Les fonctions p_i sont appelées les *fonctions de base* de l'élément fini (K, P, Σ) .

Interpolée sur un élément fini

Soit v une fonction continue. On appelle πv sa P interpolée relativement à K l'unique élément de P tel que

$$\sigma_i(\pi v) = \sigma_i(v) \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

L'expression de πv est alors:

$$\pi v = \sum_{i=1}^r \sigma_i(v) p_i,$$

où les p_i sont les éléments de base de (K, P, Σ) .

Éléments finis affinement équivalents

Les éléments finis (K, P, Σ) et $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ sont dit affinement équivalents ssi il existe une application affine inversible $F : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ telle que:

$$1) K = F(\hat{K})$$

$$2) P = \{\hat{p} \circ F^{-1}, \forall \hat{p} \in \hat{P}\}$$

$$3) \exists \Sigma = \{\sigma_i, i = 1, \dots, r\} \text{ et } \hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_i, i = 1, \dots, r\} \text{ telles que}$$

$$\sigma_i(p) = \hat{\sigma}_i(p \circ F), \quad i = 1, \dots, r, \quad \forall p \in P.$$

$(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ sera alors appelé l'élément de *référence*.

Théorème: bases des Eléments finis affinement équivalents

Soit (K, P, Σ) et $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ deux EF affinement équivalents, alors:

l'ensemble $\{p_i, i = 1, \dots, r\}$ est une base de P associée à (K, P, Σ) si et seulement si $\{\hat{p}_i, i = 1, \dots, r\}$ est une base de $\hat{P}$ associée à $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ avec

$$\hat{p}_i = p_i \circ F \quad (p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1}).$$

Définition de l'espace d'approximation V_h

Soit $P_1(K)$ l'ensemble des polynômes de degré 1 pour chacune des variables sur K . On prend alors comme espace d'approximation

$$V_h = \{v \in C^0(\Omega) \text{ telles que } \forall K \in \tau_h \quad v|_K = P_1(K)\}.$$

(on se restreint ici aux éléments finis dits P_1 pour simplifier l'exposé).

Théorème: base de l'espace d'approximation V_h

Soit V_h l'espace défini précédemment.

Soit $\{S_i, i = 1, \dots, L\}$ les sommets des triangles de τ_h , alors

$$\dim V_h = L.$$

De plus, les fonctions $\{\phi_i, i = 1, \dots, L\}$ de V_h telles que

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, L$$

forment une base de V_h .

Interpolée sur V_h

Soit v une fonction continue sur $\bar{\Omega}$, on définit son interpolée sur V_h par:

$$I_h(v) = \sum_{i=1}^L v(S_i) \phi_i.$$

Calcul sur l'élément de référence

Soit (K, P, Σ) et $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ deux EF affinement équivalents et F l'application affine qui les relie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + N,$$

où M est une matrice 2×2 et N un vecteur.
 Soit $(p_i)_i$ et $(\hat{p}_i)_i$ les éléments de base de K et $\hat{K}$, alors:

$$\begin{aligned} \int_K p_i p_j \, dxdy &= |\det M| \int_{\hat{K}} \hat{p}_i \hat{p}_j \, d\hat{x}d\hat{y} \quad \forall i, j = 1, \dots, r \\ \int_K \nabla p_i \cdot \nabla p_j \, dxdy &= |\det M| \int_{\hat{K}} (M^{-1})^t \hat{\nabla} \hat{p}_i \cdot (M^{-1})^t \hat{\nabla} \hat{p}_j \, d\hat{x}d\hat{y} \end{aligned}$$

Théorème de convergence de l'interpolation locale

Soit (K, P, Σ) un EF de Lagrange d'ordre r affinement équivalent à $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$.
 Alors il existe une constante C ne dépendant que de $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ telle que pour tout entier $0 \leq m \leq r+1$ on ait:

$$\forall v \in H^{r+1}(K) \quad |v - \pi_K v|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{r+1}}{\rho_K^m} |v|_{r+1,K},$$

avec h_K le diamètre du cercle circonscrit à K et ρ_K le diamètre du cercle inscrit dans K .

Théorème de convergence de l'interpolation globale

Une triangulation de Ω est dite régulière si il existe un nombre σ tel que $\forall K \, \sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$.

Dans ce cas, il existe une constante C ne dépendant que de $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ et de σ telle que pour $m = 0$ ou $m = 1$:

$$\forall v \in H^{r+1}(\Omega) \quad |v - I_h(v)|_{m,\Omega} \leq C h^{r+1-m} |v|_{r+1,\Omega}.$$

Théorème de convergence des Eléments Finis de Lagrange

Si pour tout h la triangulation de Ω composée d'éléments finis de Lagrange d'ordre r est régulière, si la solution du problème variationnel $u \in H^{r+1}(\Omega)$ et si u_h est la solution approchée obtenue par la méthode des EF, alors

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^r |u|_{r+1,\Omega},$$

où C est une constante indépendante de h .