TP n°1
Recherche d'un minimum

On considère la fonction de $I\!R^2$ à valeurs dans $I\!R$ suivante :

$$J(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 \tag{1}$$

dont on souhaite étudier les extrema.

1. **Partie théorique**
   (a) Déterminer les points critiques
   (b) Etudier leur nature et en déduire que J admet un minimum local.

2. **Partie numérique**
   On souhaite retrouver ce minimum par différentes méthodes numériques en utilisant le logiciel *Scilab*.
   (a) Définir et tracer la fonction J dans un domaine incluant les points critiques précédents. On tracera deux graphiques, un avec la fonction **fplot3d** l'autre avec la fonction **contour**.
   (b) On souhaite utiliser la méthode du gradient pour déterminer le minimum. A partir d'un vecteur U_0 donné, celle-ci consiste à construire la suite de vecteurs :

   $$U_{k+1} = U_k - \alpha \nabla J(U_k) \tag{2}$$

   où α est le pas, ici choisit constant.
   Programmer cette méthode et montrer à partir d'expériences numérique que l'on retrouve sous certaines conditions le minimum de J.
   (c) Dans de nombreux cas pratiques, on ne connait pas l'expression analytique du gradient de la fonction à minimiser. On peut alors approcher celui-ci par différences finies. A partir d'un développement de Taylor, proposer une méthode d'ordre 1 pour approcher ∇J. Utiliser cette approximation dans l'algorithme de minimisation et comparer avec les résultats de la question précédente.
   (d) Recommencer avec une approximation du gradient à l'ordre 2.
   (e) Pour comparer proprement les 3 méthodes, on tracera sur un même graphique l'erreur en fonction des itérations.
   (f) Le logiciel *Scilab* possède une fonction permettant de minimiser une fonctionnelle : **optim**. Utiliser celle-ci pour minimiser directement J.
   (g) Si le temps le permet, on utilisera aussi la fonction **fsolve** pour trouver numériquement les points critiques.