Traveling waves

L'objectif de ce TP est d'illustrer les résultats du cours concernant les solutions de type travelling waves des équations de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in I\!R \quad t \in]0, T] \tag{1}$$

On rappelle que ces solutions sont obtenues en cherchant u sous la forme : $u(x,t) = v(z),\ z = x - c\,t$. En fonction du terme f, l'existence de ce type de solution et les valeurs de la vitesse c peuvent être obtenues (cf cours). On résout alors l'équation différentielle :

$$v''(z) + c\,v'(z) + f(v(z)) = 0, \quad z \in I\!R, \quad v(-\infty) = 1,\ v(+\infty) = 0. \tag{2}$$

On propose dans ce TP de résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles (1), de mettre en évidence la présence de ces ondes propagatives et d'en étudier les propriétés.

1. **Résolution numérique de l'équation (1)**
   On considère une segmentation réguliere en espace, définie par $x_{i+1} = x_i + \delta x, \quad i = 0, .., N$ telle que $x_0 = -a$ et $x_N = a$. On définit la segmentation temporelle par $t^{n+1} = t^n + \delta t$. On utilisera des conditions aux limites nulles en $-a$ et a.

   (a) Ecrire un schéma de discrétisation pour l'équation (1). On prendra une méthode d'Euler pour la discrétisation temporelle, le terme linéaire sera pris implicitement, le terme non-linéaire explicitement. On utilisera un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2 en espace pour l'approximation de la dérivée seconde.

   (b) Une fois les conditions aux limites prises en compte, montrer que ce schéma peut s'écrire matriciellement sous la forme :

   $$U^{n+1} = (Id - B)^{-1} \left(U^n + \delta t f(U^n)\right).$$

   On explicitera f et la matrice B.

   (c) Programmer sous *scilab* ce schéma. Vous pourrez récupérer le programme **traveling.sce** http ://gchiavassa.perso.centrale-marseille.fr/visible/3A/TravelingWaves/

   (d) La condition initiale $u(x, t = 0)$ sera prise sous forme d'une Gaussienne centrée en $x = 0$.

2. **Etude des solutions**
   Dans chacun des cas suivants, retrouver numériquement les propriétés des solutions vues en cours. On pourra tracer les solutions exactes et estimer les valeurs numérique de c par exemple.

   (a) cas monostable : $f(u) = 0\ si\ 0 \le u < \theta$ et $f(u) = 1 - u\ si\ \theta < u \le 1$.

   (b) cas bistable : $f(u) = -u\ si\ 0 \le u < \theta$ et $f(u) = 1 - u\ si\ \theta < u \le 1$.

   (c) cas Fisher-KPP : $f(u) = \rho u(1 - u)$. Dans ce cas, on pourra vérifier qu'il existe une solution de l'équation différentielle (2) avec une vitesse $c = \frac{5\rho}{\sqrt{6}}$, donnée par

   $$u(z) = \left(1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{z}{\sqrt{6}}}\right)^{-2} \tag{3}$$

3. **Cas de deux espèces**
   On peut modéliser le cas de deux espèces en compétition à partir du système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= f_1(u,v) + D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= f_2(u,v) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{aligned}$$

   $x \in I\!R \quad t \in [0,T]$.

On pourra choisir comme dans l'exercice traité en cours :
$f_1(u,v) = r_1 u(1-u-K_1 v)$ et $f_2(u,v) = r_2 u(1-v-K_2 u)$.

Etudier numériquement l'évolution des solutions de ce système en modifiant le programme écrit pour la résolution de l'équation (1).