

Mathématiques Fondamentales

G. Chiavassa, T. Le Gouic, J. Liandrat,
M. Roche, F. Schwander, M. Tournus

Nom de l'enseignement : Cours et TD
Code enseignement : MAT-1

1^{ère} année
2015/2016

Déroulement du module MAT-1

Le module de MAT-1 se compose de deux parties :
Mathématiques Fondamentales et Analyse Numérique.

1) Partie Mathématiques Fondamentales :

- Analyse Complexe :	2 séances + 1 TD	G. Chiavassa
- Mesure et Intégration:	2 séances + 1 TD	T. Le Gouic
- Transformée de Fourier:	1 séance + 1 TD	M. Tournus
- Calcul différentiel	1 séance + 1 TD	G. Chiavassa
-Espaces de Hilbert:	1 séance + 1 TD	J. Liandrat

Intervenants :

Cours: Guillaume Chiavassa, Thibaut Le Gouic, Jacques Liandrat,
Magali Tournus
TD: GC, Muriel Roche, Frédéric Schwander, MT

Evaluation :

QCM lors du TD 5 (30 minutes) sans document (5 pts)
Examen final de 1h30 : une feuille A4 manuscrite (15 pts)

2) Partie Analyse numérique

7 cours, 4 TD, 3 TP

Evaluation :

QCM sans document (5pts)
Examen final de 1h30 : une feuille A4 manuscrite (15 pts)

Intervenants :

Cours: Jacques Liandrat
TD: Guillaume Chiavassa, Jacques Liandrat, Jean-Marie Rossi,
Frédéric Schwander, Magali Tournus

Note finale du module MAT1:

- ➔ moyenne des notes de math fondamentales et d'analyse numérique
- ➔ Validation si > 10

Chapitre 1

Analyse Complexe

L'objectif de cette partie du cours est l'étude des fonctions de variable complexe $z \in \mathcal{C}$. Nous verrons que ces fonctions possèdent des propriétés très particulières qui n'existaient pas pour les fonctions de la variable réelle.

Le champ d'application de cette théorie est immense tant en mathématique (calcul d'intégrales, transformées de Fourier,...) qu'en physique (transformations conformes, transformée de Laplace,...).

Ce document regroupe les résultats principaux qui seront présentés, commentés et éventuellement démontrés en cours.

Notations

Variable complexe : $z = x + iy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

La fonction f d'une variable complexe peut s'écrire de 3 façons différentes :

- a) $f : z \in \Omega \subset \mathcal{C} \longrightarrow f(z) \in \mathcal{C}$
- b) $f : (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x + iy) \in \mathcal{C}$
- c) $f : (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow R(x, y) + i I(x, y)$
avec $R(x, y) = \text{Re}(f)$ et $I(x, y) = \text{Im}(f)$.

Définition 1

On appelle fonction *holomorphe* toute fonction f vérifiant l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1)

$$\forall z \in \Omega \quad \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} = f'(z) \text{ finie}$$

et telle que l'application $z \longrightarrow f'(z)$ soit *continue* sur Ω .
(f' est appelée dérivée de f).

2) $f(x, y) = f(x + iy)$ est de classe $C^1(\Omega)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

3) $f(x, y) = R(x, y) + i I(x, y)$ est de classe $C^1(\Omega)$ avec

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial I}{\partial x}.$$

(Conditions de Cauchy-Riemann).

Remarques :

- On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .
- Si $f, g \in H(\Omega)$ alors $f + g, fg, f/g$ ($g \neq 0$ sur Ω) sont holomorphes et de dérivées $f' + g', f'g + fg', (f'g - fg')/g^2$.
- $f(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$, est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = a$.
 $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ est holomorphe et $f'(z) = nz^{n-1}$.
si $f \in H(\Omega)$ alors $f^n(z) \in H(\Omega)$ ($n \in \mathbb{N}$) et sa dérivée est $nf^{n-1}(z)f'(z)$.

On va s'intéresser par la suite à l'intégration des fonctions holomorphes sur des chemins, ce qui permettra d'établir des propriétés très puissantes. Nous avons besoin pour cela de quelques définitions et résultats concernant les formes différentielles.

Définition 2

On appelle *chemin de classe C^1* dans Ω l'application γ définie par :

$$t \in [a, b] \longrightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \Omega$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont des applications de classe $C^1([a, b])$.

$\gamma(a)$ est l'origine et $\gamma(b)$ l'extrémité.

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ c'est un chemin fermé ou *lacet*.

Forme différentielle et intégrale sur un chemin

Soit ω la forme différentielle sur Ω définie par :

$$\begin{aligned}\omega : \Omega &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (x, y) &\longrightarrow \omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy\end{aligned}$$

avec P et Q des fonctions continues à valeurs dans $\mathcal{C}$.

L'intégrale de ω sur le chemin de classe C^1 est donnée par la formule :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt.$$

Théorème de Green-Riemann

Sous les hypothèses suivantes :

- Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$,
- $w = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe $C^1(\Omega)$ (P et Q sont C^1),
- K un compact "simple" de Ω et γ^+ le bord de K orienté dans le sens *positif*,

la formule de Green-Riemann est donnée par :

$$\int_{\gamma^+} \omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

A partir des définitions et propriétés précédentes, nous pouvons établir aisément les deux résultats principaux de cette partie :

Théorème de Cauchy

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et K un compact de Ω .

Soit γ le bord de K orienté *convenablement*.

Si $f \in H(\Omega)$ alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Formule intégrale de Cauchy

Soit $f \in H(\Omega)$.

Soit K compact de Ω et γ son bord orienté convenablement, alors pour tout z appartenant à l'intérieur de K :

$$\underline{f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}$$

La deuxième partie de cours consiste en l'étude des propriétés des fonctions qui sont holomorphes sauf en un nombre fini de points. Ceci nous permettra d'établir le théorème des résidus qui est un des résultats fondamentaux de l'analyse complexe.

Définition 3

La fonction $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ est dite *analytique* au point $z_0 \in \mathcal{C}$ si il existe un réel $\rho(z_0) > 0$ et une suite de nombres complexes $a_n(z_0)$ tels que :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0) (z - z_0)^n \quad \text{pour} \quad |z - z_0| < \rho(z_0)$$

f est analytique dans Ω si elle l'est en tout point de Ω .

Le théorème suivant donne l'équivalence entre fonctions holomorphes et analytiques.

Théorème

Soit Ω un ouvert de $\mathcal{C}$, alors

$$\underline{f \in H(\Omega) \iff f \text{ est analytique dans } \Omega.}$$

Les coefficients du développement de Taylor de f au point z_0 vérifient

$$a_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

pour tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$.

Quelques conséquences du théorème précédent

- a) Si $f \in H(\Omega)$ alors $f^{(n)} \in H(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- b) **Théorème de Liouville** : Soit f une fonction holomorphe dans *tout* le plan complexe ($\in H(\mathbb{C})$) ; si f est *bornée*, alors f est une fonction *constante*.
- c) **Théorème de d'Alembert** : Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
- d) Soit $f \in H(U)$, où U est un ouvert connexe par arc. Si il existe un point $z_0 \in U$ tel que $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $f \equiv 0$ dans U .
- e) **Propriété de la moyenne** : Soit $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Nous nous intéressons maintenant aux fonctions qui sont holomorphes, sauf en certain points.

Développement en série de Laurent

Soit f holomorphe dans le disque pointé $\dot{D}(z_0, r) = \{z / 0 < |z - z_0| < r\}$. Pour tout $z \in \dot{D}(z_0, r)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z_0) (z - z_0)^n$$

avec

$$a_n(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_0, \rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où ρ vérifie seulement $0 < \rho < r$.

Classification des singularités isolées

– *Points singuliers apparents :*

z_0 est un point singulier apparent de f si les coefficients du développement en série de Laurent au voisinage de z_0 sont tous nuls pour $n < 0$.

– *Les pôles :*

z_0 est un pôle de f si il existe un nombre fini d'entiers $n < 0$ tels que les coefficients du D. Laurent soient non nuls :

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Dans ce cas z_0 est appelé pôle d'ordre p de f .

– *Points singuliers essentiels :*

z_0 est un point singulier essentiel de f si il existe une infinité d'entiers $n < 0$ tels que les coefficients du D. Laurent soient non nuls.

Définition 4

Soit z_0 un point singulier isolé de f une fonction holomorphe sur $\dot{D}(z_0, r)$.

On appelle *résidu* de f en z_0 le coefficient a_{-1} du D. Laurent de f en z_0 :

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_0, \rho)} f(\xi) d\xi$$

Théorème des résidus

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Soit f une fonction holomorphe dans Ω sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$.

Soit K un compact inclus dans Ω tel que les points $\{z_i \mid i = 1, \dots, N\}$ appartiennent à l'intérieur de K .

Soit γ le bord de K orienté convenablement, alors

$$\underline{\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{i=1}^N \text{Res}(f, z_i)}$$

Ce théorème permet le calcul de très nombreuses intégrales réelles comme nous le verrons dans les exemples. Il faut pour cela savoir calculer les résidus.

Quelques règles de calcul de résidus

Les propositions suivantes permettent de calculer les résidus dans des cas bien particuliers. Dans le cas général il faudra bien souvent revenir au calcul du développement de Laurent.

- Si f a un pôle *simple* (d'ordre 1) en z_0 et si g est holomorphe autour de z_0 :

$$\text{Res}(fg, z_0) = g(z_0)\text{Res}(f, z_0).$$

- Si f a un pôle *simple* en z_0 :

$$\text{Res}(f, z_0) = [(z - z_0)f(z)](z_0).$$

- Si f et g sont holomorphes au voisinage de z_0 avec $f(z_0) \neq 0$ et z_0 un zéro d'ordre 1 de g , alors z_0 est un pôle *simple* de f/g et

$$\text{Res}(f/g, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

- Pôles d'ordre supérieur à 1
Si f a un pôle d'ordre $m \geq 2$ en z_0 :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \right] (z_0).$$

Bibliographie

J-M. BONY, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Editions de l'Ecole Polytechnique.

H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson.

Exemples de calcul d'intégrales par la méthode des résidus

Les règles présentées ici permettent de calculer quelques cas particuliers d'intégrales en utilisant le théorème des résidus.

Elles renseignent sur le choix de la fonction complexe et du chemin à utiliser pour certaines classes d'intégrales réelles.

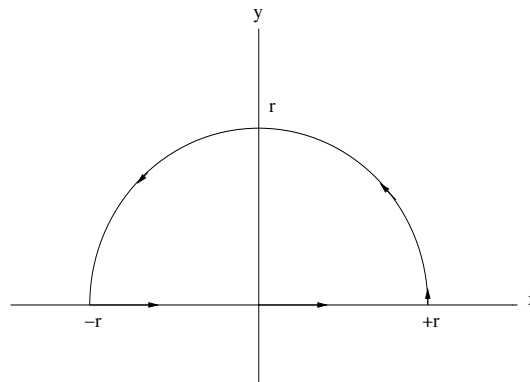
I Intégrales de la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

où R est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle réel.

Méthode :

On intègre la fonction $R(z)$ sur le lacet suivant :



on applique le théorème des résidus à $R(z)$ et on fait tendre r vers $+\infty$.

II Intégrales de la forme :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

où $R(x, y)$ est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le cercle $C(0, 1)$.

Méthode :

On pose $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ce qui donne

$$\cos \theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

On intègre alors la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

sur le cercle $C^+(0, 1)$, intégrale que l'on calcule en appliquant le théorème des résidus.

III Intégrales de la forme :

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln(x) dx$$

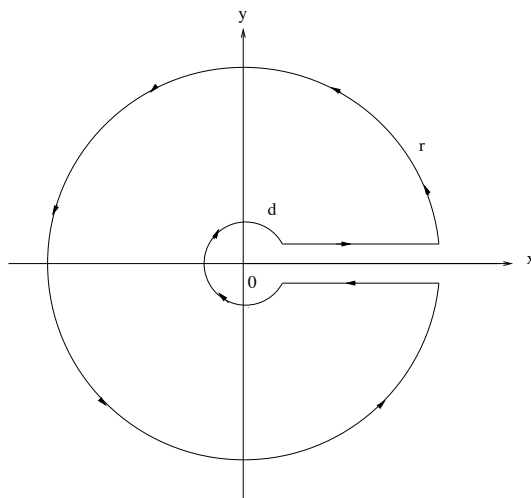
où R est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le demi-axe réel positif.

Méthode :

On choisit la détermination du logarithme complexe correspondant à la coupure $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_+$, puis on intègre la fonction

$$f(z) = R(z)(\text{Log} z)^2$$

sur le chemin suivant :



On applique alors le théorème des résidus, puis on fait tendre r vers $+\infty$ et d vers 0 .

IV Intégrales de la forme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx \quad 0 < \alpha < 1$$

où R est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le demi-axe réel positif.

Méthode :

On choisit la détermination de la puissance correspondant à la coupure $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_+$, puis on intègre la fonction

$$f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$$

sur le même chemin que pour l'intégrale précédente.

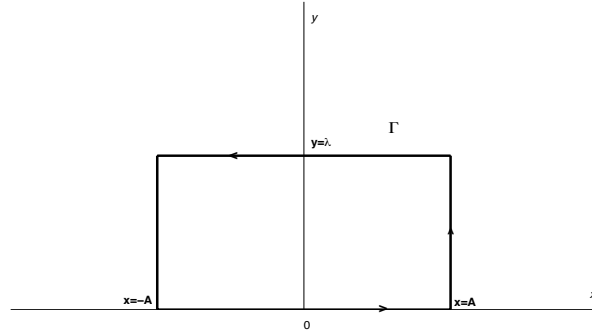
On applique alors le théorème des résidus, puis on fait tendre r vers $+\infty$ et d vers 0.

Exercices de base - Analyse complexe

Exercice. *Ecrire*

$$\int_{\Gamma} e^{-\pi z^2} dz, \quad z \in \mathbb{C}$$

sur le contour Γ suivant :



Exercice. *Montrez que*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} = 0,$$

avec $\gamma_R = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi/4]$.

Exercice. *Calculer les résidus suivants :*

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z(z+2)^3}, 0\right) \quad (\text{rep. : } 1/8).$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}, i\right) \quad (\text{rep. : } (1-2i)/10).$$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(z-1)^3(z^2+4)}, 1\right) \quad (\text{rep. : } -1/125).$$

ECM 1A

Mathématiques 1

Feuille de travaux dirigés - Analyse Complexe

Exercice 1 :

Démontrer le théorème de Liouville :

Soit f une fonction holomorphe dans tout le plan complexe ; si f est bornée, alors f est une fonction constante.

Utiliser ce résultat pour démontrer le théorème de d'Alembert :

Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

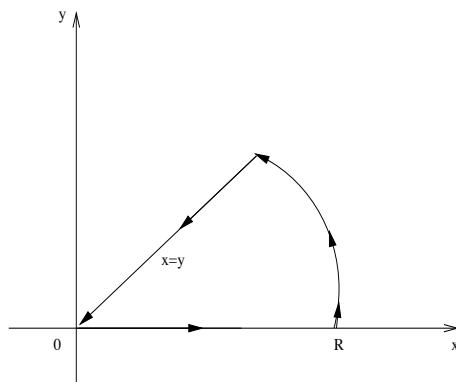
Exercice 2 :

Montrer en utilisant le théorème des résidus que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3 \sin \theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$$

Exercice 3 :

En intégrant la fonction $f(z) = e^{-z^2}$ sur le chemin suivant :



montrer que

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(Intégrales de Fresnel)

Exercices supplémentaires

Exercice. En appliquant le théorème des résidus, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{12},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{9},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-a} \quad (a > 0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \lambda x} dx = e^{-\pi \lambda^2}.$$

Indication : on utilisera le résultat de l'exercice 0.1 et on fera tendre A vers $+\infty$ pour λ fixé.

Exercice sur les logarithmes

Cet exercice ne sera pas traité en TD. Il introduit la notion de logarithme complexe et par la suite de puissance d'un nombre complexe. La connaissance de ses deux notions n'est pas requise pour l'examen.

On définit l'exponentielle d'un nombre complexe à partir de la série entière :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

1) Démontrer les propriétés suivantes :

- a) $(e^z)' = e^z$
- b) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
- c) si $z = x + iy$, alors $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$
- d) la fonction $z \rightarrow e^z$ est périodique de période $2i\pi$ ($\Leftrightarrow e^{2i\pi} = 1$).

2) Pour $\omega \in \mathcal{C}^*$ donné, résoudre l'équation $e^z = \omega$.

3) On appelle *détermination principale du logarithme dans $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_-$* la fonction

$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z)$$

où $\text{Arg}(z) \in]-\pi; \pi[$.

Vérifier que $e^{\text{Log}(z)} = z$ pour tout $z \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et que $\text{Log}(e^z) = z$ pour tout z tel que $|\text{Im}(z)| < \pi$.

On peut montrer que la fonction Log est holomorphe dans $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et que $\text{Log}'(z) = 1/z$.

4) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)(x+2)} dx = 1/2 (\ln 2)^2.$$

5) Une fois une détermination du logarithme choisie, on peut définir *la détermination correspondante de la puissance α -ième d'un nombre complexe* par :

$$z^\alpha = e^{\alpha \text{Log}(z)}.$$

La fonction $z \rightarrow z^\alpha$ est holomorphe dans le domaine considéré (par exemple $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_-$).

Exercices supplémentaires sur les logarithmes

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a} \quad (a > 0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)(x+2)} dx = \frac{\pi(2^\alpha - 1)}{\sin(\pi\alpha)} \quad -1 < \alpha < 1$$

Chapitre 2

Notions de calcul différentiel

Dans cette partie nous étudierons les outils de base du calcul différentiel, permettant de généraliser la notion de dérivée pour les fonctions de plusieurs variables. Nous terminerons par des théorèmes permettant d'étudier les extrema de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Le calcul différentiel intervient dans tous les domaines de la physique, des mathématiques et de l'économie en particulier : équations aux dérivées partielles, minimisation d'énergie, optimisation, etc...

Nous nous placerons uniquement en dimension finie dans ce cours. L'objectif est d'étudier la continuité et l'équivalent de la dérivabilité pour les fonctions définies par :

$$\begin{cases} f : U \subset \mathbb{R}^p & \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^q \\ (x_1, \dots, x_p) & \longrightarrow (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où U et V sont deux ouverts et p, q deux entiers. On notera également $(e_1, \dots, e_p)$ (resp. $(e_1, \dots, e_q)$) la base canonique de $\mathbb{R}^p$ (resp. de $\mathbb{R}^q$).

2.1 Rappels et définitions

Les fonctions $\{f_i, i = 1, \dots, q\}$ définies par (2.1) sont appelées *applications coordonnées*.

On peut définir également les *applications partielles* de f .

Définition 1 : f admet p applications partielles en $a \in U$ ($a = (a_1, \dots, a_p)$), notées $f_{a,j}$ pour $j = 1, \dots, p$ définies par

$$\begin{cases} f_{a,j} : \mathcal{V}(0) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^q \\ t \in \mathcal{V}(0) & \longrightarrow f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_p) \end{cases} \quad (2.2)$$

Continuité et dérivabilité de f

Cas $p = q = 1$

f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on ne reviendra pas sur la définition de sa continuité en a , et on définit sa dérivabilité à partir du taux d'accroissement. f est dérivable en a si la limite du taux $f'(a)$ définie par

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

existe et est finie.

De façon équivalente on peut l'énoncer sous forme d'un développement limité :

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + |h| r(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$.

Cas $p = 1, q > 0$

$$\begin{cases} f : U \subset \mathbb{R} & \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^q \\ x & \longrightarrow (f_1(x), \dots, f_q(x)) \end{cases} \quad (2.3)$$

Continuité en $a \in \mathbb{R} \iff$ les applications coordonnées sont continues en a .

Dérivabilité en $a \in \mathbb{R} \iff$ les applications coordonnées sont dérivables en a .

Cas général

Définition 2 : f continue en $a \in \mathbb{R}^p \iff$ toutes ses applications *coordonnées* f_j sont continues en a .

Définition 3 : f continue en $a \in \mathbb{R}^p \Rightarrow$ toutes ses applications *partielles* $f_{a,j}$ sont continues en a .

Attention, la réciproque est fausse. Exemple la fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (2.4)$$

Définition 4 : f admet une *dérivée suivant le vecteur v en a* si

$$\lim_{h \in \mathbb{R} \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} \text{ existe.}$$

On la note alors $D_v f(a)$. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^q$.

Cas particulier : si $v = e_j$ un vecteur de la base alors $D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Cette définition n'est pas satisfaisante pour définir la dérivabilité de f . En effet, l'existence de $D_v f(a)$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ n'assure pas la continuité de f en a contrairement au cas classique $p = q = 1$. C'est le cas par exemple pour la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (2.5)$$

On va alors utiliser l'approche développement limité plutôt que celle basée sur le taux de variation et introduire la notion de différentielle de f .

Définition 5 : la fonction $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est *différentiable* si et seulement si il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|).$$

On utilise généralement les notations suivantes : $L = df_a$, $L(h) = df_a(h) = df_a \cdot h$. Cette définition coïncide avec le développement pour le cas $p = q = 1$ avec $df_a = f'(a)$ et $df_a \cdot h = hf'(a)$.

Propriétés :

1. si f est différentiable au point a alors elle est continue au point a .
2. df_a est unique.

Exemples :

1. si f est linéaire alors $df_a = f$.
2. si f est affine, $f(X) = \phi(X) + b$ (avec ϕ linéaire), alors $df_a = \phi$.
3. si f est constante alors $df_a = 0$.
4. si $p = 1$, $q > 0$ alors $df_a = f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_q(a))^t$

On obtient également les relations suivantes avec les dérivées suivant un vecteur et les applications coordonnées :

- Si f est différentiable en a alors f admet en a des dérivées suivant tout vecteur v et

$$D_v f(a) = df_a.v$$

- f différentiable au point $a \iff$ toutes ses applications coordonnées sont différentiables en a et

$$df_a.h = (df_{1,a}.h, \dots, df_{q,a}.h)^t$$

Matrice jacobienne

La différentielle df_a étant une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, elle peut être représentée dans leurs bases canoniques respectives par une matrice q lignes et p colonnes, la colonne j correspondant aux composantes de $df_a(e_j)$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

D'après les définitions précédentes :

$$df_a(e_j) = df_a.e_j = \begin{pmatrix} df_{a,1}.e_j \\ \vdots \\ df_{a,q}.e_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{e_j} f_1(a) \\ \vdots \\ D_{e_j} f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}$$

soit

$$df_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

qui est la matrice jacobienne de f en a souvent notée $MJf(a)$.

Le calcul de $df_a(h) = df_a.h$ peut alors s'écrire comme un produit matrice-vecteur :

$$df_a.h = MJf(a) \times h$$

avec $h = (h_1, \dots, h_p)^t$.

Dans le cas particulier où $q = 1$, donc d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$df_a \cdot h = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(a), h \rangle$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)^t$.

Différentielle composée : soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset \mathbb{R}^q$ et $g : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a) \in V$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

On peut aussi l'écrire matriciellement avec les jacobiniennes :

$$MJ(g \circ f)(a) = MJg(f(a)) \times MJf(a).$$

Exemple : calcul de dérivées partielles en polaire.

Différentielle d'une application réciproque : soit f une bijection de $U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset \mathbb{R}^q$ telle que f soit différentiable en a et f^{-1} différentiable en $f(a)$ alors

$$df_{f(a)}^{-1} = (df_a)^{-1} \quad \text{et nécessairement} \quad p = q.$$

Matriciellement on a alors $MJf^{-1} = (MJf)^{-1}$ impliquant entre autre

$$\det(MJf^{-1}) = \frac{1}{\det(MJf)}.$$

Applications de classe C^1

Définition 6 $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset \mathbb{R}^q$ est de classe $C^1(U)$ si sa différentielle

$$\begin{cases} df : U & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \\ a & \longrightarrow df_a \end{cases} \quad (2.6)$$

est continue.

On a également le résultat suivant :

$f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset \mathbb{R}^q$ est de classe $C^1(U) \iff$ ses dérivées partielles existent et sont continues.

Differentielle seconde

On suppose ici que f est de classe $C^1(U)$, df est donc continue. f est alors deux fois différentiable sur U si df est différentiable, et l'on pose

$$d^2 f_a = d(df_a).$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

$d^2 f_a$ est une application *bilinéaire, symétrique* de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Corollaire (Théorème de Schwarz) : Si les dérivées partielles secondes de f existent et sont continues en a alors

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (a).$$

La différentielle seconde d'une application de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ($q = 1$) de classe C^2 est représentée par la matrice Hessienne Hf_a :

$$Hf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}$$

et

$$d^2 f_a.(h, k) = h^t Hf_a k$$

avec $(h, k) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$.

Formule de Young à l'ordre 2 :

$$f(a + h) = f(a) + df_a.h + \frac{1}{2} d^2 f_a(h, h) + o(\|h\|^2).$$

Recherche d'extrema

On s'intéresse aux fonctions $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. On a le théorème suivant :

Condition suffisante : si $df_a = 0$ et si d^2f_a est une forme bilinéaire *non-dégénérée* et *positive* (resp. *négative*), alors f admet un minimum (resp. maximum) strict en a .

- d^2f_a non-dégénérée $\iff d^2f_a.(h, k) \neq 0$ si $(h, k) \neq (0, 0)$.
- d^2f_a positive $\iff d^2f_a.(h, h) \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^p$.

Condition nécessaire : si a est un minimum (resp. maximum) local de f , alors $df_a = 0$ et d^2f_a est une forme bilinéaire *positive* (resp. *négative*).

Exemple : recherche des extrema de $J(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Exercices de base – Calcul différentiel

Exercice. Calculer la différentielle des fonctions suivantes

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n & \text{b) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \text{c) } f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \\
 u \rightarrow u & (u, v) \rightarrow uv & (u, v) \rightarrow u.v \\
 \text{d) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \text{e) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \text{f) } f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\
 (x, y) \rightarrow y \exp(x) & (u, v) \rightarrow \cos(uv) & A \rightarrow A^2
 \end{array}$$

Exercice. On considère les applications f et g définies par

$$\begin{array}{ll}
 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 & g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x, y) \rightarrow (x^2y, xy, xy^3) & (x, y, z) \rightarrow (x + y + z, xyz)
 \end{array}$$

1. Calculer la matrice jacobienne de f en a .
2. Calculer la matrice jacobienne de g en $f(a)$.
3. Calculer la matrice jacobienne de $(g \circ f)$ en a .

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2y^3z^5$. Donner la matrice Hessienne de f au point $(2, -1, 1)$.

Exercice. On considère les applications f et g définies par

$$\begin{array}{ll}
 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y) \rightarrow (x + y)^2 e^{x^2 - y^2} & (x, y) \rightarrow x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.
 \end{array}$$

Déterminer leurs extrema en précisant la nature de chacun.

Exercice. On munit l'espace des matrices réelles $n \times n$ d'une norme matricielle (i.e. $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$, $\|\cdot\|$ étant une norme sur $\mathbb{R}^n$).

1. Montrer que si $\|H\| < 1$, la matrice $\text{Id} - H$ est inversible et

$$(\text{Id} - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k.$$

2. Montrer que pour toute matrice inversible A , le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles contient une boule ouverte centrée en A . En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'application $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^{-1}$ est différentiable en Id et calculer sa différentielle.
4. Montrer qu'elle est différentiable en A pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.

Chapitre 3

Intégration de Lebesgue

La théorie de l'intégration de Lebesgue est une nouvelle méthode d'intégration. Elle se différencie de l'intégration Riemann sur différents points que nous présenterons dans ce cours. C'est aussi devenu l'outil fondamental des probabilités et des statistiques modernes.

L'intégrale de Riemann se calcule "par rapport à dx ". Ce " dx " est une notion de longueur, dans le sens où (pour $a < b$)

$$\int_a^b 1dx = b - a = \text{longueur}([a, b]).$$

L'intégrale de Lebesgue se calcule par rapport à une mesure μ , de sorte que pour un ensemble A

$$\int_A 1d\mu = \mu(A) = \text{mesure de } A.$$

3.1 Tribus et mesures

La mesure de certains ensembles semble difficile à définir. Par exemple, quelle est la longueur de l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$? La définition de Riemann ne permet pas de définir la longueur de cette ensemble (le vérifier!), alors que la théorie de Lebesgue le permettra.

Tous les ensembles pouvant être mesurés forment une **tribu**.

Définition 1 (Tribu ou σ -algèbre). Soit Ω un espace. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . Un ensemble d'ensembles $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est appelé **tribu** ou **σ -algèbre**, s'il vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ (contient l'ensemble vide)
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ (stable par complémentaire)
3. $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ (stable par union dénombrable).

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé un **espace mesurable**.

Exercices :

1. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de Ω . Montrer que $\Omega \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable.
2. Montrer que les ensembles suivants sont des tribus :
 - $\mathcal{P}(\Omega)$
 - $\{\phi, \Omega\}$
 - $\{A, A^c, \phi, \Omega\}$, quelque soit $A \subset \Omega$.
3. Montrer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des tribus de Ω , alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est aussi une tribu de Ω .

Certaines tribus seront plus intéressantes que d'autres. La tribu la plus grossière $\{\phi, \Omega\}$ n'apporte que peu d'intérêt puisqu'elle ne définit comme seuls ensembles mesurables, l'ensemble vide et Ω tout entier. Pour pouvoir définir des ensembles plus intéressants, on introduit les tribus engendrées.

Définition 2 (Tribu engendrée). Soient Ω un espace et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On appelle **tribu engendrée** par $\mathcal{A}$, la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$. On la note $\sigma(\mathcal{A})$.

Exercice. Montrer que $\sigma(\mathcal{A})$ existe quelque soit $\mathcal{A}$.

Nous travaillerons essentiellement sur des espaces topologiques (tels que $\mathbb{R}^d$). Il existe alors une tribu naturelle à considérer, c'est la tribu borélienne.

Définition 3. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique. La tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ de cet espace est la tribu engendrée par les ouverts : $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{T})$.

Exercices :

1. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{]}a, b[; a, b \in \mathbb{Q})$.
2. Montrer que $[0; 1] \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On peut montrer (mais c'est difficile) que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Les ensembles dont on pourra définir une mesure forment donc une tribu. Définissons maintenant une mesure.

Définition 4 (Mesure). Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un ensemble mesurable. On appelle **mesure positive** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application μ de $\mathcal{A}$ à valeurs dans $[0; +\infty]$ telle que :

1. $\mu(\phi) = 0$,
2. pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \phi$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
3. pour toute suite croissante $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n \geq 1} A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé un **espace mesurée**.

Exercices :

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
2. Montrer que pour $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

3. Montrer que pour $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ tels que les A_n sont deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

4. Montrer que $\mu : A \mapsto \text{card}(A)$ est une mesure.
5. Montrer que $\mu : A \mapsto \text{card}(A \cap \mathbb{N})$ est une mesure.

On appelle la mesure de tout l'espace $\mu(\Omega)$ la **masse** de μ . Une mesure de masse 1 est une mesure de probabilité (ou simplement une probabilité).

Une mesure très importante est celle qui correspond à la notion de longueur sur $\mathbb{R}$, de surface sur $\mathbb{R}^2$ et de volume sur $\mathbb{R}^3$, que nous voulions définir. C'est la mesure de Lebesgue.

Théorème 5 (Mesure de Lebesgue). *Il existe une unique mesure positive λ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que pour tout $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq d$,*

$$\lambda([a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^d |b_i - a_i|.$$

*Cette mesure est appelée **mesure de Lebesgue**.*

Les mesures permettent de définir des ensembles *négligeables*, c'est-à-dire de mesure nulle. On dit alors qu'une propriété est vraie **μ -presque partout**, si elle est vraie en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

Définition 6 (μ - presque partout). *On dit de deux fonctions f et g définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ qu'elles sont égales μ -presque partout (μ -p.p.) si*

$$\mu(\{\omega \in \Omega; f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0.$$

De la même façon, on dit d'une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions qu'elle converge μ -presque partout vers f si

$$\mu(\{w \in \Omega; f_n(w) \rightarrow f(w)\}^C) = 0.$$

3.2 Fonctions mesurables et intégrale de Lebesgue

Il est possible de définir sur un espace mesuré des fonctions réelles dites mesurables. Ce sont les fonctions présentant une *régularité* nécessaire pour pouvoir être intégrées.

Définition 7 (Fonction mesurable). Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite **mesurable** si pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Théorème 8 (Stabilité des fonctions mesurables) :

- Si Ω est un espace topologique et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$, toute fonction continue est mesurable.
- Si f et g sont deux fonctions mesurables et $a \in \mathbb{R}$, alors, $f + g$, fg , f/g (si $g \neq 0$), af sont mesurables.
- Pour $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont mesurables.
- La fonction indicatrice de A

$$\mathbf{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, alors

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$$

est une fonction mesurable. Toutes les fonctions mesurables qui peuvent s'écrire ainsi sont appelées les **fonctions étagées**.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction étagée.

Définition 9 (Intégrale de Lebesgue de fonctions étagées). Soit $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ une fonction étagée sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. L'**intégrale de Lebesgue de f par rapport à μ** est alors définie par

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Exercice. L'écriture d'une fonction étagée n'est pas unique. Montrer que cette définition ne dépend pas du choix de l'écriture. Autrement dit, montrer que si

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{1}_{B_i},$$

alors

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n b_i \mu(B_i).$$

Cette première définition simple permet de définir l'intégrale de Lebesgue pour n'importe quelle fonction mesurable positive grâce au théorème suivant.

Théorème 10 (Fonctions mesurables positives). *Toute fonction mesurable positive est limite croissante ponctuelle de fonctions étagées positives.*

Définition 11 (Intégrale de Lebesgue). *Soit f une fonction mesurable positive sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions étagées positives de limite f . Alors, l'**intégrale de Lebesgue de f par rapport à μ** est définie par*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

*Pour une fonction f mesurable quelconque, il existe deux fonctions positives f^+ et f^- telles que $f = f^+ - f^-$. Si $\int f^+ + f^- d\mu < \infty$ (ou de la même façon $\int |f| d\mu < \infty$), f est dite **μ -intégrable** et son intégrale est définie par*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

*Pour $A \in \mathcal{A}$, on définit l'intégrale de f par rapport à μ sur le **domaine A** par*

$$\int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu.$$

Deux remarques importantes : la définition ne dépend pas de la suite croissante choisie, et l'intégrale d'une fonction positive peut éventuellement être égale à $+\infty$.

Théorème 12 (Linéarité, sous-additivité et croissance de l'intégration). *L'intégrale de Lebesgue vérifie $\forall a \in \mathbb{R}, \forall f, g$ μ -intégrables,*

$$\int af + gd\mu = a \int f d\mu + \int gd\mu,$$

et

$$\int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu.$$

De plus, si $f \leq g$, alors

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Cette définition reste très abstraite et difficile à manier. Le lien avec l'intégrale de Riemann permet d'utiliser toutes les techniques de calculs connues pour l'intégrale de Riemann.

Théorème 13 (Lien avec l'intégrale de Riemann). Soit $f = f^+ - f^-$ telle que f^+ et f^- sont deux fonctions positives Riemann-intégrables. Alors f est λ -intégrable ou Lebesgue-intégrable (i.e. intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue). De plus, les intégrales coïncident

$$\int f(x)dx = \int f d\lambda.$$

Attention, les intégrales de Riemann semi-convergentes ne sont pas Lebesgue-intégrables ! Par exemple $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+x}$ n'est pas Lebesgue-intégrable.

Trois théorèmes importants permettent de manier ces intégrales.

Théorème 14 (Convergence monotone). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite **croissante** de fonctions mesurables **positives** convergeant μ -p.p. vers f . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Théorème 15 (Convergence dominée). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables convergeant μ -p.p. vers f telle qu'il existe une fonction mesurable g vérifiant

$$\sup_{n \geq 1} f_n \leq g \text{ et } \int g d\mu < \infty.$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Théorème 16 (Lemme de Fatou). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables **positives**. Alors,

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

La théorème de convergence dominée, utile tel quel, permet aussi d'obtenir ces deux résultats de continuité et de différentiabilité *sous l'intégrale*.

Théorème 17 (Continuité par rapport à un paramètre). Soit $f : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $t \in E$, la fonction $\omega \mapsto f(\omega, t)$ est mesurable,
2. pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto f(\omega, t)$ est continue en $a \in E$,
3. il existe une fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f(\omega, t)| \leq g(\omega)$, pour tout $t \in E$ et tout $\omega \in \Omega$.

Alors la fonction $F : t \mapsto \int f(\omega, t) d\mu(\omega)$ est continue au point $a \in E$.

Théorème 18 (Dérivation par rapport à un paramètre). Soient T un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $t \in T$, la fonction $\omega \mapsto f(\omega, t)$ est intégrable,
2. pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto f(\omega, t)$ est dérivable sur T ,
3. il existe une fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)| \leq g(\omega)$, pour tout $t \in T$ et tout $\omega \in \Omega$ tel que $\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)$ existe.

Alors, pour tout $t \in T$, la fonction $\omega \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)$ est intégrable et la fonction $F : t \mapsto \int f(\omega, t) d\mu(\omega)$ est dérivable sur T et on a

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) d\mu(\omega).$$

3.3 Intégrale multiple

Pour une fonction $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$, quelle notion de mesurabilité peut-on utiliser ? Quelle tribu peut-on associer à $E \times F$ à partir de celles de E et F ?

Définition 19 (Tribu produit). Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. On appelle **tribu produit** et l'on note $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ la tribu engendrée par les ensembles produits $\{A \times B; A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\}$:

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \sigma(\{A \times B; A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\}).$$

Pour une fonction de $\mathbb{R}^{p+q}$, on peut alors utiliser la tribu borélienne (i.e. engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^{p+q}$), ou la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$. En fait, ces deux tribus coïncident.

Théorème 20 (Tribu produit sur $\mathbb{R}^d$).

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q).$$

De la même façon, il est possible de définir une mesure produit sur un produit d'espaces mesurés.

Définition 21 (Mesure produit). Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés. Alors, il existe une mesure $\mu \times \nu$ sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}, \mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Cette mesure est appelée **mesure produit** de μ et ν .

Cette mesure est unique lorsque les mesures dont on prend le produit sont des mesures de probabilité.

Pour la mesure de Lebesgue, on a le résultat suivant.

Théorème 22 (Mesure produit de mesures de Lebesgue). *La mesure produit de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^p$ et de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^q$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{p+q}$.*

Une fonction $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ peut alors être intégrée par rapport à sa première variable, sa seconde variable, ou les deux, dans n'importe quel ordre. Dans de nombreux cas, lorsque l'on intègre par rapport aux deux variables, la valeur de l'intégrale ne change pas. Mais ce n'est pas toujours le cas. Les théorèmes de Tonelli et Fubini donnent des conditions sous lesquels il est possible d'invertir l'ordre d'intégration.

Théorème 23 (Tonelli). *Soient $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ **mesurable positive**, et μ et ν deux mesures sur $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ respectivement. Alors,*

$$\int f d\mu \times \nu = \int \int f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Théorème 24 (Fubini). *Soient $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, et μ et ν deux mesures sur $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ respectivement. Si*

$$\int |f| d\mu \times \nu < \infty$$

(i.e. f est $\mu \times \nu$ -**intégrable**), alors,

$$\int f d\mu \times \nu = \int \int f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Remarque. *La condition $\int |f| d\mu \times \nu < \infty$ à vérifier peut s'écrire, grâce au théorème de Tonelli,*

$$\int \int |f(x, y)| d\mu(x) d\nu(y) < \infty \text{ ou encore } \int \int |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) < \infty.$$

Exercice. *En utilisant ces théorèmes, donner deux critères sur $(f_n)_{n \geq 1}$ pour que*

$$\int \sum_{n \geq 1} f_n(x) dx = \sum_{n \geq 1} \int f_n(x) dx.$$

Un théorème très utile permet de manipuler l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 25 (Changement de variable). *Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels qu'il existe un difféomorphisme Φ de U sur V . Alors, si f est positive ou intégrable*

$$\int_V f d\lambda = \int_U f \circ \Phi |J_\Phi| d\lambda,$$

où $|J_\Phi|$ désigne le déterminant de la Jacobienne de Φ .

Exercice. *Calculer la Jacobienne de $\Phi : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.*

3.4 Espaces L^p

Pour un espace $(E, \mathcal{E}, \mu)$ mesuré, l'ensemble des fonctions μ -intégrables est un espace vectoriel, que l'on note $\mathcal{L}^1(E, \mu)$. De même, pour $p \geq 1$, on note

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}; \int |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note

$$\mathcal{L}^p(E) = \mathcal{L}^p(E, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu).$$

On peut munir $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ d'une semi-norme

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

$\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p$ car

$$\|f\|_p = 0 \nRightarrow f = 0.$$

Afin d'obtenir un espace vectoriel normé, on quotiente l'espace $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence

$$f \sim g \iff \|f - g\|_p = 0 \iff \mu(\{f - g \neq 0\}) = 0.$$

On définit alors l'espace vectoriel normé $L^p(E, \mu)$ par

$$L^p(E, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mu) / \sim.$$

C'est l'espace $\mathcal{L}^p$ où l'on a remplacé les fonctions par leur classe d'équivalence.

On obtient ainsi un espace vectoriel normé. $L^p(\mu)$ est même un espace complet et séparable.

Théorème 26 (Riesz-Fischer). *L'espace $L^p(E, \mu)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach. En particulier, $L^2(E, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int f g d\mu$.*

Définition 27 (Convergence quadratique). *La notion de convergence dans $L^2(E, \mu)$ est appelée convergence en moyenne quadratique.*

Pour $p = \infty$, on peut définir les espaces $L^\infty(E, \mu)$ par

$$f \in L^\infty(E, \mu) \iff f \text{ est mesurable et il existe } M \text{ tel que } \mu(\{x; f(x) \geq M\}) = 0.$$

On note alors,

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 | \mu(\{x; f(x) \geq M\}) = 0\}.$$

L^∞ est aussi un espace de Banach.

Deux inégalités importantes permettent de comparer les normes des fonctions.

Théorème 28 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). Soient $f, g \in L^2(E, \mu)$, alors

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \sqrt{\int |f|^2 d\mu \int |g|^2 d\mu},$$

autrement dit,

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Théorème 29 (Inégalité de Hölder). Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors, $\forall f \in L^p, \forall g \in L^q$,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

En particulier, si μ est une mesure de probabilité et $p \leq q$, alors

$$L^p(E, \mu) \subset L^q(E, \mu).$$

Attention, ce n'est en général pas vrai si μ n'est pas une mesure de probabilité. En particulier, si $E = \mathbb{R}^d$ et $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, ce n'est pas le cas. En effet, par exemple, $x \mapsto \frac{1}{1+x} \notin L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ mais $x \mapsto \frac{1}{1+x} \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$!

Exercices de base – Intégration de Lebesgue

Exercice. *Lequel des ensembles suivants est une tribu sur $\mathbb{R}$?*

1. $\{0, 1, 2\}$
2. $\{\mathbb{R}, \emptyset\}$
3. $\mathbb{R}$
4. $\{\mathbb{R}, \emptyset, [0, 1]\}$
5. $\{\mathbb{R}, \emptyset, [0, 1],] - \infty, 0[\cup]1; \infty[\}$.

Exercice. *Soit $(A_i)_{i \geq 1}$ une suite d'éléments distincts de la tribu $\mathcal{A}$. Laquelle des fonctions suivantes est une fonction étagée pour $\mathcal{A}$?*

1. $13\mathbf{1}_{A_1}$
2. $4\mathbf{1}_{A_1 \cap A_3} - 12$
3. $\sum_{i=1}^5 3^i \mathbf{1}_{A_i}$
4. $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mathbf{1}_{A_i}$.

Exercice. *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $f = 4\mathbf{1}_{[0,2]} - 5\mathbf{1}_{[12;15]}$. Calculer $\int f d\lambda$.*

Exercice. *Soit $f = 4\mathbf{1}_{[0,1]}$ et $g = -5\mathbf{1}_{[2,4]}$. Calculer $\int f d\delta_2$ et $\int g d\delta_2$.*

Exercice. *Soit $\mu = \delta_1 + \delta_2$. On pose $f = \mathbf{1}_{[0,1]} + 3\mathbf{1}_{[2,4]}$. Calculer $\int f d\mu$.*

Exercice. *Soit $\mu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2$. On pose $f = \mathbf{1}_{[0,1]} + 3\mathbf{1}_{[2,4]}$. Calculer $\int f d\mu$.*

Exercice. *Soit $\mu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2$. On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$. Calculer $\int f d\mu$.*

Exercice. *Soit $\mu = \lambda + \delta_2$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. On pose $f = \mathbf{1}_{[0,1]} + 3\mathbf{1}_{[2,4]}$. Calculer $\int f d\mu$.*

ECM 1A

Mathématiques 1

Feuille de travaux dirigés - Intégration de Lebesgue

Exercice 4 :

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_a)$ où a est un réel et δ_a est la mesure de Dirac en a . Soit f une fonction mesurable. Calculer

$$\int f d\delta_a.$$

Exercice 5 :

1. Montrer qu'une combinaison linéaire de mesures est une mesure.
2. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction étagée positive sur Ω . On pose pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu_f(A) = \int f \mathbf{1}_A d\mu.$$

Montrer que μ_f est une mesure.

Exercice 6 :

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables convergeant vers une fonction f . Montrer que

$$\int f d\mu \leq \sup_{n \geq 1} \int f_n d\mu.$$

2. On pose $f_n = n(1 - nx)\mathbf{1}_{[0, 1/n]}$ et $f = \lim_n f_n$. Pour $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\Omega = \mathbb{R}$, calculer

$$\liminf_n \int f_n d\mu \text{ et } \int f d\mu.$$

Exercice 7 (Lemme de Borel-Cantelli) :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ une suite d'ensembles mesurables telle que

$$\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < \infty.$$

Montrer que $\mu(\cap_{k \geq 1} \cup_{n \geq k} A_n) = 0$.

Exercice 8 :*Calculer*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Exercice 9 :*Soient a, b deux réels positifs. Montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}.$$

Exercice 10 (Calcul de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-t^2} d\lambda(t)$) :*Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} d\lambda(t) \text{ et } G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} d\lambda(t) \right)^2.$$

1. Montrer que F et G sont dérivables et calculer leur dérivé.
2. Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.
4. En déduire $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-t^2} d\lambda(t)$.

Exercice * 11 :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive (sous-entendu pour la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$). Pour tout $t > 0$, on pose

$$S_t = \{\omega \in \Omega; f(\omega) > t\}.$$

Montrer que

$$\int f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(S_t) dt.$$

Indication : Montrer d'abord l'égalité pour f étagée, puis pour toute fonction mesurable positive en utilisant le théorème de convergence monotone.

Exercice ** 12 :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives convergeant μ -p.p. vers une fonction f . On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Montrer que f_n converge vers f dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Indication : On pourra appliquer le lemme de Fatou à une suite g_n bien choisie.

Chapitre 4

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil mathématique utilisé dans des domaines aussi variés que le traitement du signal, la mécanique des fluides, la physique théorique ou encore la compression d'images.

Nous présenterons ici les résultats mathématiques importants qui permettent par la suite d'appréhender plus facilement l'utilisation de la transformée de Fourier dans ses divers domaines d'application.

4.1 Transformée de Fourier des fonctions de L^1

La transformée d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$ est donnée par la définition suivante.

Définition 1

Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est la fonction définie par :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2i\pi \langle x, \xi \rangle} dx$$

où $\langle x, \xi \rangle$ représente le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

On définit également la transformée de Fourier conjuguée par :

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2i\pi \langle x, \xi \rangle} dx$$

Pour simplifier les calculs et alléger les notations, nous nous placerons dorénavant dans $\mathbb{R}$.

Théorème de Riemann-Lebesgue

Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, alors :

- a) $\hat{f}$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
- b) $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et l'on a

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

- c) $\hat{f}$ vérifie

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

La proposition suivante permet d'obtenir des résultats importants, en particulier pour la transformée de Fourier inverse.

Proposition 1

Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Alors $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et

$$\int f(t) \hat{g}(t) dt = \int \hat{f}(x) g(x) dx.$$

Les propriétés suivantes ont de nombreuses applications en pratique, en particulier celles concernant la dérivation que nous démontrerons en TD.

Propriétés par rapport à la dérivation

- a) Si $x^k f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 0, \dots, n$ alors $\hat{f}$ est n fois dérivable et

$$\hat{f}^{(k)} = \mathcal{F} \left((-2i\pi x)^k f(x) \right) \quad k = 1, \dots, n$$

- b) Si $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et si $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 1, \dots, n$ alors

$$\mathcal{F} \left(f^{(k)} \right) (\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

- c) si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support compact alors $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

d) sous les hypothèses du b), on a aussi :

$$\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|^n}\right) \quad \text{lorsque } \xi \rightarrow +\infty.$$

Propriétés de parité

Si l'on note f_σ la symétrisée de f , $f_\sigma(x) = f(-x)$, et si $f \in L^1(\mathbb{R})$,

- 1) $\overline{\mathcal{F}(f)} = \overline{\mathcal{F}}(\bar{f})$
- 2) $(\mathcal{F}(f))_\sigma = \overline{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(f_\sigma)$

On déduit de ces relations :

- Si f est paire (*resp. impaire*) alors $\hat{f}$ est paire (*resp. impaire*).
- Si f est réelle paire (*resp. réelle impaire*) alors $\hat{f}$ est réelle paire (*resp. imaginaire impaire*).

Propriétés de translation et dilatation

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, et $a, \lambda \in \mathbb{R}$:

- 1) $\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-2i\pi a\xi} \hat{f}(\xi)$
- 2) $\hat{f}(\xi-a) = \mathcal{F}(e^{2i\pi ax} f(x))$
- 3) $\widehat{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)} = |\lambda| \hat{f}(\lambda\xi)$

Théorème d'inversion de la transformée de Fourier

Si f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors :

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(t) = f(t)$$

en tout point où f est continue.

L'inverse de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ est particulièrement simple, mais son existence est conditionnée à l'appartenance de $\hat{f}$ à $L^1(\mathbb{R})$, ce qui n'est évidemment pas vrai pour toutes les fonctions f de $L^1(\mathbb{R})$.

Il existe des situations où l'on peut savoir seulement à partir de f si sa transformée de Fourier sera dans $L^1(\mathbb{R})$. On a par exemple la proposition suivante.

Proposition 2

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et si f, f', f'' sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

4.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Nous allons introduire dans cette partie l'espace de "prédilection" de la transformée de Fourier pour lequel la définition de l'inverse par exemple ne posera plus de problème. Nous commençons par une définition.

Définition 2

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ est à *décroissance rapide* si pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x^p f(x)| = 0$$

Propriétés des fonctions à décroissance rapide

- 1) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide alors $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$
- 2) Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et si $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est à décroissance rapide.

Définition 3

On appelle $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$ telles que :

- 1) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
- 2) f ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

Théorème 3

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformation de Fourier, i.e $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$.

On peut alors énoncer le théorème principal de cette partie, découlant du précédent.

Théorème d'inversion dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier est une application linéaire bijective et bicontinue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et l'on a $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi\end{aligned}$$

Egalité de Plancherel Parseval

Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

1)

$$\int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

2)

$$\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ semble donc être l'espace idéal pour la transformée de Fourier puisqu'il permet de définir l'inverse sans aucune restriction ou d'appliquer les formules de dérivation directement.

Malheureusement en physique ou en traitement du signal par exemple, les fonctions sont souvent beaucoup moins régulières et "moins décroissantes" et par conséquent n'appartiennent que très rarement à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Par contre elles sont la plupart du temps "d'énergie finie", ce qui du point de vue mathématique revient à dire qu'elles appartiennent à l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Il faut donc étendre la transformée de Fourier à cet espace ce qui n'est pas à priori évident puisque $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas inclus dans $L^1(\mathbb{R})$.

C'est encore avec l'aide de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que nous allons apporter une réponse à ce problème.

4.3 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

La construction de la transformée dans $L^2(\mathbb{R})$ est en partie basée sur le théorème suivant.

Théorème

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

En utilisant ce résultat de densité, la complétion de $L^2(\mathbb{R})$ et des résultats sur le prolongement des formes linéaires continues, on montre qu'il est possible d'étendre la transformée de Fourier à l'espace $L^2(\mathbb{R})$. On obtient alors le résultat fondamental suivant.

Théorème

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ et son inverse $\overline{\mathcal{F}}$ se prolongent en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ et l'on a :

- 1) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ presque partout.
- 2) $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$ on a $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

- 3) $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

4.4 Quelques transformées de Fourier usuelles

On note $H(x)$ la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 sinon.

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x^k}{k!} e^{-ax} H(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(a + 2i\pi\xi)^{k+1}} \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{x^k}{k!} e^{ax} H(-x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{-1}{(-a + 2i\pi\xi)^{k+1}} \quad k \in \mathbb{N} \\ e^{-a|x|} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2} \\ \operatorname{sign}(x)e^{-a|x|} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{-4i\pi\xi}{a^2 + 4\pi^2\xi^2} \end{aligned}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$:

$$\begin{aligned} e^{-ax^2} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} \\ \chi_{[-a,a]}(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin 2a\pi\xi}{\pi\xi} \end{aligned}$$

Exercices de base - Transformée de Fourier

Exercice. Soit H la fonction d'Heaviside définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $H(x)e^{-2x}$.
2. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = H(x)x^n e^{-2x}$.

Exercice. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie pour x réel par :

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

Exercice. Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

On note $h = f * g$ le produit de convolution de f et g . Calculer la transformée de Fourier de la fonction h .

Exercice. Soit Π la fonction porte définie par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Calculer le produit de convolution $\Pi(x) * \Pi(x)$.
2. Pour $n = 2, 3, 4$, calculer l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^n dx$$

Exercice. Calculer la transformée de Fourier de $h(x) = e^{-2x^2 + 2x}$.

Exercice. Calculer la transformée de Fourier de $g(x) = e^{2ix-|x|}$.

Exercice. Calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 10t^2 + 9}$$

Exercice. 1. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$ et écrire l'équation différentielle du 1er ordre satisfaite par f .

2. En déduire une équation différentielle satisfaite par la transformée de Fourier de f notée $\hat{f}(\nu)$.

3. Résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de $\hat{f}(\nu)$ sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$.

Exercice. Calculer les produits de convolution $g_a * g_b$ et $C_a * C_b$ avec :

$$g_u = \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2u^2}} \text{ avec } u = a, b > 0$$

$$C_u = \frac{1}{\pi} \frac{u}{u^2 + x^2} \text{ avec } u = a, b > 0$$

ECM 1A

Mathématiques 1

Feuille de travaux dirigés - Transformée de Fourier

Exercice 13 :

Démontrer les formules de dérivation suivantes :

a) Si $x^k f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 0, \dots, n$ alors $\hat{f}$ est n fois dérivable et

$$\hat{f}^{(k)} = \mathcal{F} \left((-2i\pi x)^k f(x) \right) \quad k = 1, \dots, n$$

b) Si $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et si $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 1, \dots, n$ alors

$$\mathcal{F} \left(f^{(k)} \right) (\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi)$$

Exercice 14 :

Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

en utilisant le théorème des résidus.

Exercice 15 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Exercice 16 :

Soit $g_a(x) = e^{-ax^2}$, calculer $g_a * g_b$, a et b réels positifs.

Exercice 17 :

Existe-t-il un élément neutre pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$?

Chapitre 5

Espaces de Hilbert

Ce cours a pour but de présenter les rudiments de la théorie des espaces de Hilbert. Ceux-ci sont les plus simples et les plus importants des espaces vectoriels normés complets (espaces de Banach). Ils interviennent fortement dans de nombreux domaines des Mathématiques (analyse fonctionnelle, analyse numérique, ...) et de la Physique Mathématique (ils servent notamment de base au formalisme de Dirac en Physique Quantique). La théorie trouve sa source dans l'étude des équations intégrales (Volterra, Fredholm) et a été progressivement élaborée au cours du premier tiers du XX^{ème} siècle, principalement par Hilbert, Schmidt, Fréchet, Riesz et von Neumann, lequel donne en 1932 la définition abstraite utilisée aujourd'hui.

Ce document regroupe les résultats principaux de cette présentation axiomatique, commentés et éventuellement démontrés en cours. Pour des exposés complets on pourra se reporter aux ouvrages de la bibliographie.

Bibliographie

W. APPEL, *Mathématiques pour la Physique*, Editions H&K, 2002 .

J-M. BONY, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.

C. GASQUET et P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, 1990

A. GUICHARDET, *Intégration, Analyse hilbertienne*, Editions Ellipses, 1989

J-M. INNOCENT, *Compléments d'analyse fonctionnelle et d'intégration*, Poly. du cours 1A 2002 de l'ESM2, Bibliothèque.

W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1998.

5.1 Espaces préhilbertiens

Définition 1

Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel **complexe** E est une application $(x, y) \mapsto (x|y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie :

1. $(x + x'|y) = (x|y) + (x'|y)$ et $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ pour tous x, x', y de E et λ de $\mathbb{C}$.
2. $(y|x) = \overline{(x|y)}$ pour tous x, y de E (symétrie hermitienne)
3. $(x|x) \geq 0$ pour tout x de E et $(x|x) = 0 \iff x = 0$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit **préhilbertien**.

Remarques :

En d'autres termes $(\cdot|\cdot)$ est une *forme hermitienne définie positive*.

La définition implique que $(x|y + y') = (x|y) + (x|y')$ mais attention : $(x|\lambda y) = \bar{\lambda}(x|y)$.

On a l'identité dite *de polarité* :

$$4(x|y) = (x + y|x + y) - (x - y|x - y) + i(x + iy|x + iy) - i(x - iy|x - iy)$$

qui montre que la forme hermitienne $(\cdot|\cdot)$ est entièrement déterminée par la forme quadratique associée $x \mapsto (x|x)$.

Dans le cas d'un espace vectoriel **réel** E un produit scalaire est une forme bilinéaire $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique définie positive.

Au produit scalaire on associe une **norme** en posant $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

On connaît les deux inégalités célèbres suivantes : pour tout x et tout y de E

$$\boxed{|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|} \quad \text{Cauchy - Schwarz}$$

$$\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|} \quad \text{Minkowski (inégalité triangulaire)}$$

Exemples fondamentaux d'espaces préhilbertiens :

1. $\mathbb{R}^n$ (espace euclidien) et $\mathbb{C}^n$ (espace hermitien) avec

$$(x|y) = \begin{cases} x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n & \text{cas réel} \\ x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n & \text{cas complexe} \end{cases}$$

2. $l^2(\mathbb{N})$ est l'espace des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 'a valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\sum_{\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty$ muni du produit scalaire

$$(x|y) = \sum_{\mathbb{N}} x_n \bar{y}_n$$

En effet $|x_n \overline{y_n}| = |x_n| |y_n| \leq \frac{1}{2} (|x_n|^2 + |y_n|^2)$ assure la convergence de cette dernière série.

3. $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}, (\cdot|\cdot))$ est l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

4. $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace des (classes de) fonctions de module carré sommable sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{\Omega} f \overline{g} d\mu$$

En effet $f \overline{g}$ est intégrable car $|f \overline{g}| = |f| |g| \leq \frac{1}{2} (|f|^2 + |g|^2)$. La norme associée 'a ce produit scalaire n'est autre que la norme $\|\cdot\|_2$ (cf cours d'intégration).

Définition 2

On dit que x est **orthogonal** 'a y si $(x|y) = 0$. On note alors $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Si A est une partie non vide de E , l'**orthogonal de** A est $A^\perp = \{x \in E, \forall y \in A, x \perp y\}$. Un résultat important est que quel que soit A , $A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel fermé de E .

Les espaces préhilbertiens ont des propriétés qui généralisent celles qu'on connaît bien dans les espaces euclidiens :

Identités remarquables : pour tout x et tout y de E

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x|y)$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{identité du parallélogramme.}$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\|\frac{1}{2}(x + y)\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \quad \text{identité de la médiane.}$$

Théorème de Pythagore :

$$x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

La réciproque est vraie si E est réel, fausse si E est complexe.

Continuité du produit scalaire et de la norme :

L'application $(x, y) \mapsto (x|y)$ est continue de $E \times E$ vers $\mathbb{C}$.

L'application $x \mapsto \|x\|$ est continue de E vers $\mathbb{R}_+$.

5.2 Espaces de Hilbert

5.2.1 Définition. Exemples

Définition1

Un **espace de Hilbert** ou **espace hilbertien** est un espace préhilbertien COMPLET pour la norme associée au produit scalaire.

Exemples fondamentaux d'espaces hilbertiens :

1. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$
2. $l^2(\mathbb{N})$
3. $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

sont tous des espaces de Hilbert.

Par contre $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}, (\cdot|\cdot))$ n'EST PAS un espace de Hilbert, car il n'est pas complet pour la norme $|||_2$. En effet la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions continues telles que :

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^3} \\ x^{-\frac{1}{3}} & \text{si } \frac{1}{n^3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

est de Cauchy dans E mais ne converge pas dans E . Sa limite en moyenne quadratique est la fonction $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ qui est dans $L^2([0, 1])$ mais n'est pas continue sur $[0, 1]$.

5.2.2 Projection sur un convexe fermé

Définition1

Une partie C d'un espace vectoriel E est **convexe** si quand elle contient deux points elle contient aussi le segment qui les joint :

pour tous x, y de C et t de $[0, 1]$, $z = tx + (1 - t)y \in C$.

Une boule est convexe. Une intersection de convexes est convexe.

Théorème 1 : projection sur un convexe fermé

Soit C un convexe fermé non vide de l'espace **de Hilbert** H et $x \in H$. Alors il existe un unique élément x^* de C dont la distance 'a x est minimum, i.e. tel que :

$$\boxed{||x - x^*|| = \min_{y \in C} ||x - y||}$$

Il est caractérisé par la propriété suivante :

$$\boxed{\forall y \in C \quad \Re(x - x^* | y - x^*) \leq 0}$$

x^* est appelé la **projection** de x sur C et noté $\mathbf{P}_C x$.

Remarques :

Le résultat est en défaut si C n'est pas fermé : considérer une boule ouverte et x en dehors.

L'application $P_C : H \rightarrow C$ contracte les distances : $\|x^* - y^*\| \leq \|x - y\|$, donc en particulier elle est continue.

5.2.3 Projection sur un sous-espace fermé

En pratique le cas le plus important est celui où C est un sous-espace vectoriel fermé V de l'espace de Hilbert H . Un sous-espace vectoriel est toujours convexe, mais pas toujours fermé. On connaît cependant deux types de sous-espaces qui sont forcément fermés :

- V de dimension finie
- $V = A^\perp$ pour une partie A non vide de H

Théorème 1 : projection orthogonale sur un sous-espace fermé

Soit V un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H et $V^\perp$ son sous-espace orthogonal. Alors :

1. pour tout $x \in H$ sa projection $P_V x$ sur V est l'unique élément x_V de V tel que $x - x_V$ soit orthogonal à V .
2. les sous-espaces V et $V^\perp$ sont supplémentaires

$$\boxed{H = V \oplus V^\perp}$$

pour tout $x \in H$ il existe $x_V \in V$ et $x_{V^\perp} \in V^\perp$ uniques tels que $x = x_V + x_{V^\perp}$ et on a $x_V = P_V x$ et $x_{V^\perp} = P_{V^\perp} x$

Remarque :

On a $\|x\|^2 = \|x_V\|^2 + \|x_{V^\perp}\|^2$ et $d(x, V) = \|x_{V^\perp}\|$.

Définition 1

Pour $A \subset H$ on note $Vect(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A , i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de A :

$$x \in Vect(A) \iff x = \sum_1^k \lambda_i a_i$$

Définition et Théorème 2 : critère de totalité

On dit qu'une partie A de l'espace de Hilbert H est **totale** si $Vect(A)$ est dense

dans H , i.e. si $\overline{Vect(A)} = H$.

Pour que A soit totale, il faut et il suffit que $A^\perp$ soit réduit à $\{0\}$.

Remarque :

De façon générale pour toute partie A non vide $(A^\perp)^\perp = \overline{Vect(A)}$.

5.2.4 Dual d'un espace de Hilbert

Théorème de Riesz : dual topologique d'un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert. À tout élément $y \in H$ on peut faire correspondre la forme linéaire continue L_y définie par $L_y(x) = (x|y)$. Réciproquement, étant donnée une forme linéaire continue L sur H , il existe un et un seul vecteur y_L de H tel que pour tout $x \in H$ on ait $L(x) = (x|y_L)$.

Remarque :

Ce théorème doit être rapproché (en tenant compte des conventions différentes au départ) du formalisme des *bras* $\langle \varphi|$ et des *kets* $|\psi\rangle$ de la Mécanique Quantique, dans lequel l'action de $\langle \varphi|$ sur $|\psi\rangle$ est aussi le produit scalaire $\langle \varphi|\psi\rangle$.

5.3 Bases orthonormales

5.3.1 Cas des espaces préhilbertiens

Dans ce paragraphe E est un espace préhilbertien, pas nécessairement complet.

Définition 1

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments non nuls de E .

1. la suite est dite **orthogonale** si $(e_m|e_n) = 0$ pour $m \neq n$.
2. la suite est dite **orthonormale** si $(e_m|e_n) = \delta_{m,n}$ (symbole de Kronecker).
3. la suite est dite une **base orthonormale** ou **base hilbertienne** de E si elle est à la fois une suite orthonormale et une suite totale.

Remarques :

On vérifie facilement qu'une suite orthogonale est libre.

Attention ! une base orthonormale n'est pas (sauf en dimension finie) une base algébrique (i.e. une partie libre et génératrice).

Exemples fondamentaux :

1. dans $\mathbb{R}^n$ (espace euclidien) et $\mathbb{C}^n$ (espace hermitien) la base canonique est une base orthonormale.
2. dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ la suite (e_n) avec $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ où 1 figure au rang n est une base orthonormale.
3. dans l'espace préhilbertien non complet $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}, (.,.))$ la suite des exponentielles complexes $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $e_n(t) = e^{2i\pi nt}$ est une base orthonormale.

Définition 2 et Théorème : séparabilité

On dit que l'espace préhilbertien E est **séparable** si il contient une suite finie ou dénombrable qui est totale dans E .

Pour que E possède une base orthonormale, il faut et il suffit que E soit séparable.

La preuve repose sur le **procédé d'orthogonalisation de Schmidt** : étant donnée une suite (e_n) d'éléments de E linéairement indépendants, on fabrique une suite orthogonale (e'_n) ainsi : $e'_0 = e_0$ $e'_1 = e_1 - P_{V_0}e_1$ $e'_2 = e_2 - P_{V_1}e_2 \dots$

$V_n = Vect(e_0, e_1, \dots, e_n)$ et P_{V_n} est le projecteur orthogonal sur V_n qui est fermé car de dimension finie.

Propriété : projection sur un sous-espace de dimension finie

Soit V un sous-espace de dimension finie k de E et soit $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ une base orthonormale de V . Alors pour tout x de E on a :

1. $P_V x = \sum_{n=1}^k x_n e_n$ avec $x_n = (x|e_n)$
2. $d(x, V)^2 = \|x - P_V x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^k |x_n|^2$

Corollaire : inégalité de Bessel

Soit (e_n) une suite orthonormale de E . Pour tout x de E on pose $x_n = (x|e_n)$. Alors on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \leq \|x\|^2$$

Théorème 2 : caractérisation des bases orthonormales

soit E un espace préhilbertien séparable et soit (e_n) une suite orthonormale de E . On note encore $x_n = (x|e_n)$ pour tout x de E . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (e_n) est une base orthonormale de E

2. pour tout x de E
$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$$

$$3. \text{ pour tout } x \text{ de } E \quad \boxed{\|x\|^2 = \sum_0^\infty |x_n|^2} \quad Parseval$$

$$4. \text{ pour tous } x, y \text{ de } E \quad \boxed{(x|y) = \sum_0^\infty x_n \overline{y_n}} \quad Parseval$$

Remarque :

Posons $\Phi : x \in E \mapsto (x_n) \in l^2(\mathbb{N})$. Φ est linéaire et le théorème dit que (e_n) est une **base** orthonormale si et seulement si Φ est une **isométrie** de E dans $l^2(\mathbb{N})$. Mais attention : une isométrie est certainement toujours injective, mais en dimension infinie elle n'est pas forcément surjective.

Exemple : on a vu que dans l'espace préhilbertien non complet $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}, (.,.))$ la suite des exponentielles complexes $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $e_n(t) = e^{2i\pi nt}$ est une base orthonormale. L'isométrie $\Phi : E \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ est donnée dans ce cas par

$$f \mapsto \left(\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi nt} dt \right)$$

Φ ne peut pas être surjective ici, parce que E n'est pas complet alors que $l^2(\mathbb{Z})$ l'est.

5.3.2 Cas des espaces de Hilbert

Théorème

Soit H un espace de Hilbert séparable complexe. Si $\dim(H) = n < +\infty$ alors H est isomorphe à $\mathbb{C}^n$. Si $\dim(H) = +\infty$ alors H est isomorphe à $l^2(\mathbb{N})$.

Remarque :

L'isomorphisme réciproque est : $\Phi^{-1} : (x_n) \in l^2 \mapsto \sum x_n e_n \in H$. Cette série converge dans H parce que H est complet.

La démonstration s'appuie sur le résultat suivant : soient $v_0, v_1, \dots$ des éléments orthogonaux deux à deux de l'espace de Hilbert H . Alors

$$\sum_0^\infty v_n \text{ converge dans } H \iff \sum_0^\infty \|v_n\|^2 < +\infty \text{ et dans ce cas } \left\| \sum_0^\infty v_n \right\|^2 = \sum_0^\infty \|v_n\|^2.$$

5.3.3 Applications

Polynômes orthogonaux

Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que les polynômes soient intégrables par rapport à μ et supposons en outre que la suite des monômes $1, x, \dots, x^n, \dots$ soit totale dans $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Alors on peut construire une base orthonormale de H par le procédé de Schmidt :

$$Q_0 = 1$$

$$Q_1 = x - (x|Q_0)Q_0$$

...

$$Q_{n+1} = x^{n+1} - P_{V_n} x^{n+1} \text{ avec } V_n = Vect(Q_0, Q_1, \dots, Q_n).$$

...

puis on normalise en posant $P_n = \frac{Q_n}{\|Q_n\|}$ avec $\|Q_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |Q_n(x)|^2 d\mu(x)$

Exemples :

1. si μ est concentrée sur un intervalle I borné alors les polynômes sont denses dans $L^2(I, \mu)$. Par exemple si μ est la mesure de Lebesgue sur $I = [-1, +1]$ on trouve les polynômes de **Legendre**.
2. si $d\mu(x) = e^{-2\pi x^2} dx$ sur $\mathbb{R}$ on obtient les polynômes d'**Hermite**. Les fonctions $f_n(x) = e^{-\pi x^2} P_n(x)$ sont les **fonctions d'Hermite**, elles forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ (λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) qui joue un rôle important pour la transformation de Fourier dans L^2 .
3. si $d\mu(x) = e^{-x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x) dx$ on obtient les polynômes de **Laguerre**.

Base de Haar

On pose

$$h(t) = h_{0,0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{hors de } [0, 1[\\ 1 & \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ -1 & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\text{et } h_{j,k}(t) = 2^{j/2} h(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

On peut montrer que ce **système de Haar** est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$

Exercices de base – Espaces de Hilbert

Exercice. Soit E un espace de Hilbert. On note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire réel et $\|x\|$ la norme. Montrer que les applications suivantes sont continues :

$$\left\{ \begin{array}{ll} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \langle x, y \rangle, \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ll} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|x\|. \end{array} \right.$$

Exercice. Soit E un espace de Hilbert de dimension $n < +\infty$. Donner la forme de n'importe quelle application linéaire continue de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice. Soit E un espace de Hilbert de dimension $n < +\infty$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . On note $\langle x, y \rangle$ son produit scalaire réel. Montrer que si on écrit tout élément de E , $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, l'application $x \mapsto x_i$ est une forme linéaire continue. En déduire qu'il existe une famille $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$ telle que $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x, f_i \rangle e_i$. Que vaut $\langle e_i, f_j \rangle$?

Exercice. Construire une base orthogonale, échelonnée en degrés, où chaque élément a son coefficient du terme de plus haut degrés égal à 1, pour l'espace des polynômes de degrés 3 et le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$.

Exercice. Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A, E \rightarrow F$, une application linéaire et continue. Montrer qu'il existe une unique application linéaire et continue $A^*, F \rightarrow E$, telle que $\forall (x, y) \in E \times F, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ et que $\|A\| = \|A^*\|$.

Exercice. L'entier $n > 0$ étant fixé, $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire euclidien. On choisit $a \in \mathbb{R}^n$.

- a) Montrer que $C = a + (\mathbb{R}^+)^n$ est un convexe fermé non vide.
- b) Expliciter la projection de $\mathbb{R}^n$ dans C .

Exercice. On se place dans $L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} fg$. On note $h = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$ où χ_Ω est la fonction caractéristique de $\Omega \subset \mathbb{R}$.

$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on définit $h_{j,k}(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k)$.

- a) Dessiner $h_{2,1}$.
- b) Calculer $\langle h_{j,k}, h_{j',k'} \rangle$ pour tout $(j, j', k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{N}^2$

Exercice. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace pré-hilbertien des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$. Pour $p > 0$ et $a \in]0, 1[$ fixés, on considère la forme linéaire $u : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto u(f) = \int_0^1 t^p f(t) dt$.

- a) Montrer que u est continue et calculer sa norme. (Indication : On pourra introduire la fonction $\phi(t) = t^p \chi_{[0,a]}$ où χ_Ω est la fonction caractéristique de $\Omega \subset [0, 1]$)
- b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \in E$ telle que $u(f) = \langle f, g \rangle$ pour tout f . (Indication : Montrer que si une telle fonction existait ce serait ϕ mais $\phi \notin E$)
- c) Quelle conclusion peut-on tirer sur le théorème de représentation de Riesz ?

ECM 1A

Mathématiques 1

Feuille de travaux dirigés - Calcul différentiel et Espaces de Hilbert

Exercice 18 :

Soit $f, g : U \subset E \rightarrow F$ deux fonctions différentiables en $a \in E$, où E et F sont deux espaces vectoriels. Soit $\langle f, g \rangle$ le produit scalaire de E . Montrer que la fonction $\phi = \langle f, g \rangle$ est différentiable en a et que

$$d\phi_a.h = \langle df_a.h, g(a) \rangle + \langle f(a), dg_a.h \rangle$$

.

Exercice 19 :

Soit $\phi : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction radiale c'est à dire telle que $\phi(x_1, \dots, x_n) = g(r)$ avec $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Calculez $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2}$ puis $\Delta \phi$.

Exercice 20 :

On peut prouver que les polynômes L_n définis pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

sont (au signe près) les polynômes de Laguerre.

1) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3 .

2) Déterminer la valeur de

$$m = \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx$$

3) Montrer que pour $n \geq 1$ toutes les racines du n -ième polynôme de Laguerre sont réelles, simples et se trouvent dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 21 :

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f périodique de période 1 telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

TD Exercices supplémentaires

Exercice I

En utilisant le théorème des résidus, calculez

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

Exercice II

On note φ la fonction telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ et ψ la fonction telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On veut calculer la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de la fonction φ .

- 1) En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier par rapport à la dérivation, montrer que

$$\frac{d\widehat{\varphi}}{d\xi}(\xi) = -2\pi^2\xi \widehat{\psi}(\xi).$$

- 2) En utilisant le fait que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\psi}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, donnez l'expression de $\widehat{\varphi}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Exercice III

Calculer l'aire du domaine plan défini par

$$\begin{aligned} ax^2 \leq y \leq bx^2 & \quad (0 < a < b) \\ \frac{c}{x} \leq y \leq \frac{d}{x} & \quad (0 < c < d) \end{aligned}$$