TP n°1
Initiation Scilab, Interpolation, Quadrature

Les TP d'analyse numérique se feront avec le logiciel Scilab, qui est installé sur les ordinateurs de l'école. C'est un logiciel libre développé par l'INRIA, qui peut se télécharger à l'adresse suivante : *http ://www.scilab.org/*. Une documentation très fournie se trouve également sur le site : *http ://cermics.enpc.fr/scilab_new/site*

1. **Prise en main de *Scilab*.**
   Les questions (a) et (b) sont résolues dans le fichier **exo1-tp1.sce** que l'on commentera ensemble. Vous devez récupérer ce fichier à l'adresse suivante :
   http ://gchiavassa.perso.ec-marseille.fr/visible/1A
   et le copier sur votre compte personnel.

   On souhaite évaluer l'intégrale suivante :
   $$I = \int_1^2 \log(x)dx$$
   à partir de la somme de Riemann :
   $$J \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} log(x_i),$$
   les $\{x_i, i = 0, .., N-1\}$ étant définis par $x_i = 1 + i/N$.

   (a) Faire une fonction *Scilab* ayant comme argument la valeur N et retournant la valeur approchée J ainsi que l'erreur relative par rapport à I.

   (b) Ecrire un programme principal permettant de :
      1. tracer la fonction $\ln(x)$ ainsi que l'approximation par morceaux qui est utilisée dans la somme de Riemann.
      2. tracer l'erreur en fonction du nombre de points N.
      3. vérifier que cette méthode de quadrature est d'ordre 0.

   (c) Evaluer l'intégrale I par la méthode de Simpson vue en TD et déterminer graphiquement son ordre.

2. **Un problème d'interpolation.**
   Lors d'une étude d'un constucteur automobile portant sur la consommation en carburant, des ingénieurs ont obtenu les 10 valeurs expérimentales $(t_i, v_i)_{i=0,...,9}$ suivantes, en mesurant toutes les 5 secondes la vitesse (en km/h) d'un véhicule dans un intervalle de temps de 45 secondes.

0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
55	60	58	54	55	60	54	57	52	49

   On constate que le véhicule se déplace à une vitesse oscillant autour de 55 km/h.

(a) Montrer que l'on peut obtenir l'équation d'un polynôme de degré 9 passant par ces 10 points. Si l'on écrit p_9 sous la forme

$$p_9(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_9 t^9,$$

montrer que la détermination des inconnues a_i du polynôme revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \ldots & t_0^9 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^9 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_9 & t_9^2 & \ldots & t_9^9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_9 \end{bmatrix}$$

(b) Ecrire un programme *Scilab* qui calcule cette matrice, résoud le système puis trace le polynôme d'interpolation p_9 sur l'intervalle $[0, 45]$.

(c) Quelles vitesses obtient-on par interpolation aux instants $t = 2,5s$ et $t = 42,5s$? Les résultats semblent-ils en accord avec le comportement moyen du véhicule ? Justifier.

(d) Quelles valeurs des vitesses obtient-on pour ces mêmes instants si l'on a recours à des polynômes de degré 2 en ne prenant que les trois premiers points de l'échantillon de mesures pour interpoler la vitesse à $t = 2,5s$ et les trois derniers points pour interpoler la vitesse à $t = 42,5s$? Quelle règle générale semble se dégager ?

(e) A partir des 10 mesures relevées entre 0 et 45 secondes, on souhaiterait utiliser le polynôme d'interpolation en dehors de cet intervalle et en déduire la vitesse aux instants $t = 47s$ et $t = 50s$. Les résultats obtenus sont-ils acceptables ?