ECM 1A

CALCUL DES PROBABILITES
Feuille de travaux dirigés numéro 4

Exercice 1 : un exemple d'approximation gaussienne basée sur le TLC
On lance 500 fois de suite une pièce de monnaie parfaite. Estimer la probabilité que le nombre de pile obtenu ne s'écarte pas de son espérance de plus que 10 (puis de plus que 30)
a) d'abord en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
b) puis en utilisant l'approximation gaussienne de la loi binômiale (théorème de DeMoivre-Laplace, cas particulier du théorème central limit) : en pratique on considère que si $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$, on peut numériquement substituer à la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Exercice 2 : le hasard rebelle
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de Cauchy $C(1)$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$.
Calculer les fonctions caractéristiques de $\overline{X}_n$ et de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Comparer ces résultats avec la loi des grands nombres et le théorème central limit.

Exercice 3 : convergences
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$X_n(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \\ \mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{n} \end{cases}$$

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité. Et en moyenne quadratique ?
2) Pour $i \geq 1$, calculer la probabilité de l'évènement $[X_i = 1] \cap [\forall j > i\, X_j = 0]$. En déduire que p. s. la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas.

Exercice 4 : processus multiplicatif
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. qui prennent seulement deux valeurs a et b $(0 < a < 1 < b)$ avec probabilités p et $q = 1-p$ respectivement $(0 < p < 1)$ et t.q. $\mathbb{E}(X_n) = 1$. On pose $Y_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.
1) En utilisant l'inégalité $\ln(x) < x - 1$ pour $x \neq 1$, montrer que $\mathbb{E}(\ln(X_n)) < 0$.
Etudier le comportement asymptotique de $\dfrac{\ln(Y_n)}{n}$, en déduire que la suite (Y_n) converge p.s. vers une limite à préciser. Un joueur joue chaque jour le dixième de sa fortune à pile ou face contre un adversaire. Quel est l'avenir de sa fortune ?
2) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$. La suite (Y_n) converge-t-elle dans L^1 ?