TP n°2
Quelques systèmes proie-prédateur

On se propose d'étudier le comportement d'une population composée de proies et de prédateurs. On note $x(t)$ les variations au cours du temps du nombre de proies, et $y(t)$ celles des prédateurs. Le modèle dynamique d'interaction est un système différentiel s'écrivant sous la forme

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(x) + h(x,y) \\ y'(t) & = & g(y) + k(x,y) \\ t & \in &]0,T] \\ x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \end{array}$$

Les fonctions f et g décrivent la croissance de chacune des espèces lorsqu'elles sont isolées, les termes h et k rendent compte des intéractions entre les deux populations.

Pour les proies on choisira un terme logistique, correspondant au fait qu'elles n'ont pas besoin des prédateurs pour vivre et que la population isolée tend vers la constante K :

$$f(x) = x(1 - x/K).$$

Pour les prédateurs, on choisira un terme de décroissance linéaire, correspondant au fait qu'ils ne peuvent pas survivre seuls :

$$g(y) = -m\ y.$$

(On pourra ensuite essayer aussi avec un terme logistique).

Les exemples qui suivent sont extraits du livre : *Modélisation mathématique en écologie* de P. Auger, C. Lett et J-C. Poggiale (Dunod), disponible au centre de documentation de l'école. Les études théoriques sur l'existence et la stabilité des points fixes pour les exemples qui suivent sont consultables dans cet ouvrage.

1. **Modèle de type Lotka-Volterra**
   Si l'on considère que le nombre moyen de rencontres entre proies et prédateurs est proportionnel au produit des effectifs, les termes d'intéractions peuvent se modéliser simplement par :

   $$h(x,y) = -a\ xy \quad k(x,y) = b\ xy,$$

   $a, b \in I\!R^+$. L'étude du système montre deux cas possibles d'évolution :
   - si $m/b > K$ le point fixe $(x = K, y = 0)$ est stable, et correspond à l'extinction des prédateurs.
   - si $m/b < K$ le point fixe $(m/b, r/a \times (1 - m/(bK))$ est stable.

   (a) Ecrire un programme scilab permettant de retrouver ces résultats. On tracera l'évolution temporelle des deux espèces, ainsi que le diagramme de phase. On utilisera le solveur **ODE** avec le schéma de Runge-Kutta (rkf).

2. **Modèle de Holling**
   S l'on s'intéresse au nombre de proies tuées par prédateur et par unité de temps, i.e $k(x,y)/y$, on s'apperçoit que le modèle précédent n'est pas très réaliste. Ce rapport valant bx, cela signifie que plus il y a de proies plus le prédateur mange... On peut alors introduire un effet de saturation correspondant au fait que le prédateur est rassasié. Dans ce cas les fonctions h et k peuvent être choisies sous la forme :

$$h(x,y) = -a\frac{xy}{x+D} \quad k(x,y) = b\frac{xy}{x+D},$$

   $D \in I\!R^+$.
   L'étude du système montre plusieurs cas possibles d'évolution :
   - si $\frac{mD}{b-m} > K$ le point fixe $(x = K, y = 0)$ est stable, et correspond à l'extinction des prédateurs.
   - si $\frac{mD}{b-m} < K$ on peut observer 3 cas : soit un état stable attractif (x^*, y^*) où les deux populations sont présentes, soit l'extinction des prédateurs, soit un cycle limite présentant deux populations oscillantes.
   (a) Mêmes questions que pour le modèle de Lotka-Volterra. On essaiera à partir d'expériences numériques de retrouver les différents cas possibles.

3. **Modèle de Beddington**
   Dans le modèle précédent, $k(x,y)/y$ est indépendant de y. Ce qui signifie qu'il n'y a pas de compétition entre les prédateurs pour la chasse. On peut introduire aussi une saturation en prenant

$$h(x,y) = -a\frac{xy}{1+bx+cy} \quad k(x,y) = e\frac{xy}{1+bx+cy},$$

   $b, c, e \in I\!R^+$.
   L'étude du système dans ce cas n'est pas simple avec le terme logistique pour les proies. (Cette étude est faite dans le livre dans le cas d'un terme de croissance linéaire par contre). On se contentera ici de faire des expériences numériques et d'observer l'évolution des deux populations en fonction de paramêtres.

On pourra par la suite introduire un super prédateur dans un des modèles précédents et étudier son impact sur les autres populations.