TP n°3
Systèmes dynamiques, portraits de phase

1. **Système dérivant d'un potentiel**
   Soit le potentiel $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et le système dynamique associé :
   $$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{grad}\,(V(X))\,. \tag{1}$$
   (a) Montrer que
   $$\forall\, X, \quad \frac{\mathrm{d}\,V(X)}{\mathrm{dt}} \leq 0,$$
   et que
   $$\frac{\mathrm{d}V(X_0)}{\mathrm{dt}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_0 \quad \text{est un point d'équilibre.}$$
   (b) En déduire que si X_0 est un minimum isolé de V, alors X_0 est asymptotiquement stable.
   (c) Soit $X = (x, y)^T$ et $V(X) = x^2(x-1)^2 + y^2$.
   Expliciter le système (1). Calculer et étudier ses points d'équilibre. Montrer qu'aux points réguliers, les trajectoires sont perpendiculaires aux isovaleurs de V.
   (d) Faire une fonction *scilab* permettant de calculer ce potentiel et de tracer ses lignes d'isovaleurs. On utilisera la fonction **contour2d**.
   (e) Intégrer nmériquement avec la fonction **ode** le système différentiel, puis tracer les trajectoires issues de points que vous choisirez et vérifier les propriétés vues aux questions précédentes.

2. **Système hamiltonien**
   Soit le système
   $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} & = & y \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}} & = & x + x^2 \end{cases}$$
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $H(x, y)$ telle que
   $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} & = & \dfrac{\partial H}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$
   (b) Montrer que les trajectoires correspondent aux isovaleurs de H.
   (c) Déterminer les points fixes et étudier leur stabilité.
   (d) Tracer les isovaleurs de H. Vérifier que ce sont bien les trajectoires en intégrant numériquement le système.