ECM
S8
Modélisation Mathématique TP 4

Exercice : Etude d'un système chaotique simple.
Dans l'étude de la croissance des populations, le modèle logistique de Vershulst (1838) est un des plus simples. Il consiste à traduire l'évolution d'une population animale à l'aide d'une relation du type

$$\begin{cases} P_{n+1} = kP_n(1 - P_n) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}^+ \\ P_0 \text{ donné.} \end{cases} \tag{1}$$

où

- $P_n \in [0, 1]$ représente la population de l'espèce animale à l'année n exprimée en pourcentage du maximum théorique que cette population peut atteindre dans un territoire donné.
- k est un réel strictement positif représentant le taux de croissance effectif d'une période à la suivante.

Le terme $1 - P_n$ représente ici l'*effet rétroactif* qui maintient la croissance entre certaines limites. Il aura tendance à diminuer la population de l'année P_{n+1} lorsque P_n deviendra très élevée[1] et, inversément, augmenter P_{n+1} lorsque P_n deviendra très faible.

Soit la fonction $f_k(x) = kx(1 - x)$ avec $x \in [0, 1]$.

1) Montrer que $f_k([0, 1]) \subset [0, 1]$ si et seulement si $k \in [0, 4]$.
2) On suppose désormais $k \in [0, 4]$. Montrer que 0 est un point fixe attractif de f_k si et seulement si $k \leq 1$. Le vérifier en programmant la suite de point fixe (1) et en représentant graphiquement les itérations de la méthode.
3) On suppose $k > 1$. Montrer que f_k admet un autre point fixe que 0, noté l_k. Montrer que l_k est attractif si et seulement si $k \in]1, 3]$. Le vérifier numériquement et graphiquement.
3) Etudier la suite itérative pour $\in]3, 4]$ et observer que :
   – pour $3 < k < 3,45$, le système finit par osciller entre 2 valeurs (cycle d'ordre 2),
   – pour $3,45 < k < 3,57$, la longueur du cycle augmente de plus en plus rapidement,
   – pour $3,57 < k < 4$, la longueur du cycle s'allonge et le système semble avoir un comportement chaotique tout à fait imprévisible à long terme. Observer que, dans cette phase, l'imprévisibilité du système est fortement liée à sa sensibilité aux conditions initiales.

[1]Manque de ressources alimentaires = Saturation de la population = P_n proche de 1

Représentation graphique : On peut résumer ces phénomènes à l'aide d'un diagramme appelé *diagramme de bifurcation*. En abscisse, on placera les différentes valeurs de k et en ordonnées les valeurs de la population après un grand nombre d'années.