

TP n°5 Modèle de Fisher

Un modèle simple permettant de prendre en compte la répartition spatiale d'une population est celui de Fisher (vu en cours). Il consiste à rajouter au terme logistique un terme de diffusion spatiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u(1-u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in [-a, a] \quad t \in]0, T] \quad (1)$$

ρ étant un paramètre réel positif.

On propose dans ce TP de résoudre numériquement cette équation aux dérivées partielles et de mettre en évidence la présence d'ondes propagatives.

1. Ondes propagatives : rappels

On s'intéresse à des solutions de l'équation (1) de la forme $u(x, t) = u(z)$, $z = x - ct$. En remplaçant cette solution dans (1) on obtient l'équation différentielle

$$u''(z) + cu'(z) + \rho u(z)(1-u(z)) = 0.$$

Les points d'équilibres dans le plan (u, u') sont $(0, 0)$ et $(1, 0)$ (voir cours). On pourra vérifier qu'il existe une solution de l'équation différentielle reliant ces deux points avec une vitesse $c = \frac{5\rho}{\sqrt{6}}$, donnée par

$$u(z) = \left(1 + (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{z}{\sqrt{6}}}\right)^{-2} \quad (2)$$

- (a) Faire une fonction *scilab* permettant de calculer et tracer cette solution au temps t sur l'intervalle $x \in [-a; a]$.

2. Résolution de l'équation de Fisher

On considère une segmentation régulière en espace, définie par $x_{i+1} = x_i + \delta x$, $i = 0, \dots, N$ telle que $x_0 = -a$ et $x_N = a$. On définit la segmentation temporelle par $t^{n+1} = t^n + \delta t$. Pour les applications numériques on prendra par exemple $a = 35$, $\rho = 1$ et on calculera la solution jusqu'au temps final $T = 12$. La condition initiale $u(x, t = 0)$ sera prise sous forme d'une Gaussienne centrée en $x = 0$ et l'on utilisera des conditions aux limites nulles en $-a$ et a .

- (a) Ecrire un schéma de discrétisation pour l'équation (1). On prendra une méthode d'Euler pour la discrétisation temporelle, le terme linéaire sera pris implicitement, le terme non-linéaire explicitement. On utilisera un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2 en espace pour l'approximation de la dérivée seconde.
- (b) Une fois les conditions aux limites prises en compte, montrer que ce schéma peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$U^{n+1} = (Id - B)^{-1} (U^n + \delta t f(U^n)).$$

On explicitera f et la matrice B .

- (c) Programmer sous *scilab* ce schéma. Vous pourrez récupérer le programme **laplacien.sce** permettant de construire la matrice B <http://gchiavassa.perso.centrale-marseille.fr/visible/S8/Fisher>

- (d) Tracer sur le même graphique la solution obtenue $u(x, T)$ ainsi que la solution $u(z)$. Commentaires.
- (e) Montrez que les fronts présents dans la solution numérique se propagent bien à une vitesse proche de $c = \frac{5\rho}{\sqrt{6}}$.