Ecole Centrale de Marseille

G. Chiavassa

Tronc commun Analyse Numérique 3A

TP Scilab : Schémas Volumes Finis pour équations non-linéaires

On considère l'équation scalaire :

$$\partial_t U + \partial_x f(U) = 0$$

avec $f(U) = \frac{U^2}{2}$ (burgers) ou $f(U) = U(1-U)$ (traffic),
pour laquelle on va écrire différents schémas numériques.

A partir des programmes écrits pour les équations scalaires linéaires, implémenter les schémas volumes finis suivants :

- *Upwind* : $F_{i+1/2} = f(U_i), \quad si \quad s >= 0$ et $F_{i+1/2} = f(U_{i+1}) \quad sinon.$
  s est la vitesse du choc entre U_i et U_{i+1}.

- *Lax-Friedrich* : $F_{i+1/2} = 1/2(f(U_i) + f(U_{i+1})) + \frac{\delta x}{2\delta t}(U_i - U_{i+1})$

- *Lax-Wendroff* : $F_{i+1/2} = f(U^*)$ où $U^* = 1/2(U_i + U_{i+1}) + \frac{\delta t}{2\delta x}(f(U_i) - f(U_{i+1}))$

- *Roe-Local-Lax-Friedrich* : voir cours

Dans chacun des cas, on utilisera les conditions initiales suivantes :
- $U_0(x) = -sgn(x) \qquad x \in [-1, 1]$
- $U_0(x) = -sgn(x) + 1 \qquad x \in [-1, 1]$
- $U_0(x) = sgn(x) \qquad x \in [-1, 1]$
- $U_0(x) = -sin(\pi x) \qquad x \in [-1, 1]$

et l'on vérifiera que la solution numérique correspond bien à celle attendue (choc ou raréfaction).

Dans un deuxième temps, on introduira un terme source que l'on discrétisera avec une méthode de splitting.
On pourra prendre le cas d'une entrée ou sortie de voitures, modélisée par le terme : $\alpha\delta(x - x_0)$.